Библиотека
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
кружка

Д.О.ШКЛЯРСКИЙ, Н.Н.ЧЕНЦОВ, И.М.ЯГЛОМ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ
2
ГЕОМЕТРИЯ
(ПЛАНИМЕТРИЯ)

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

ВЫПУСК 2

Д. О. ШКЛЯРСКИЙ, Н. Н. ЧЕНЦОВ,
И. М. ЯГЛОМ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ 2

ГЕОМЕТРИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ)

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1952

11-3-1

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Номера задач, предлагавшихся на московских математических олимпиадах 6

Задачи 7

1. Задачи смешанного содержания (1—38) 7
2. Задачи на максимум и минимум, связанные с расположением точек и фигур (39—56) 20
3. Задачи на построение и на нахождение геометрических мест (57—90) 23
4. Задачи на доказательство теорем (91—150) 30

Решения 56

Ответы и указания 368

Редакторы *О. С. Ивашев-Мусатов* и *А. З. Рывкин*.
Техн. редактор *С. Н. Ахламов*. Корректор *Ц. С. Варшавская*.

Подписано к печати 17/X 1952 г. Бумага $84 \times 108/_{32}$. 5,94 бум. л. 19,475 печ. л. 19,18 уч.-изд. л. 39 332 тип. зн. в печ. л. Т-07691. Тираж 50 000 экз. Цена книги 5 руб. 75 коп. Переплет 1 руб. Заказ № 3740.

Номинал по прейскуранту 1952 г.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой вторую часть сборника задач, составленного по материалам школьного математического кружка при Московском государственном университете. Она содержит задачи по планиметрии и совершенно не зависит от первой части книги, посвященной арифметике и алгебре.

Принципы, которыми руководствовались авторы при подборе задач, были подробно указаны в предисловии к первой части книги. Много внимания уделялось задачам «нестандартным», требующим для своего решения привлечения соображений, непривычных для школьников, но широко используемых в математике сегодняшнего дня. В настоящей второй части такие «нестандартные» задачи составляют основное содержание первых двух циклов задач, по своему характеру близких друг к другу. В небольшом цикле 2 («Задачи на наибольшие и наименьшие значения, связанные с расположением точек и фигур») собрано несколько задач, которые можно было бы свободно отнести и к циклу 1, но которые хотелось выделить отдельно, чтобы ярче оттенить то общее, что имеется у всех них в постановке вопроса. Отметим, что круг вопросов, затронутый в этом разделе, несмотря на всю его элементарность, в настоящее время еще только начинает разрабатываться; ряд задач цикла 2 заимствован из статей, напечатанных в научных математических журналах в самое последнее время (за 1950—1951 гг.), а многие примыкающие сюда вопросы до настоящего времени еще и вовсе не решены.

Следующие два цикла задач более традиционны. Первый из них содержит задачи на построение и на нахождение геометрических мест, второй — задачи на доказательство теорем. На русском языке имеется несколько хороших сборников задач этих типов, которые мы здесь старались не дублировать.

Многие задачи циклов 3 и 4 были придуманы в школьном математическом кружке при МГУ или предлагались на математических олимпиадах московских школьников (список задач, предлагавшихся на олимпиадах, приведен на стр. 6). В цикле 3, посвященном задачам на построение, приведены в основном задачи, более редкие в школьной практике, — задачи на построения с ограниченными средствами, построения с помощью инструментов, отличных от циркуля и линейки, построения на поверхности сферы, задачи на построение треугольников и многоугольников, заданных положением некоторых точек этих фигур. В цикле 4, посвященном задачам на доказательство, большое внимание уделяется теоремам, играющим существенную роль в различных разделах так называемой «высшей геометрии», а также задачам на отыскание наибольших и наименьших величин.

В решениях ряда задач циклов 3 и 4 было бы удобно использовать свойства движений или преобразований подобия; другие задачи хорошо решаются с применением более сложных геометрических преобразований (проективные преобразования, инверсия и т. д.). Стремясь сделать книгу доступной всем школьникам, мы, однако, вынуждены отказаться от подобных решений; соответственно этому использование геометрических преобразований в решениях задач сведено к минимуму.

Следует отметить, что в настоящей, планиметрической, части книги имеется несколько задач, относящихся к свойствам геометрических фигур в пространстве (точно так же, как в следующей, стереометрической, части книги будут встречаться и задачи по планиметрии). По этому поводу мы можем только снова повторить уже сказанное в указаниях к пользованию книгой в начале первой части: названия отдельных циклов и частей книги являются в значительной мере условными, передающими только общее содержание раздела или части. Две близкие по содержанию задачи, одна из которых относится к планиметрии, а вторая — к стереометрии, мы считали целесообразным поместить рядом друг с другом, а не в разных частях сборника.

Вся книга, как и первая часть сборника, состоит из условий задач, решений, ответов и указаний (помещенных в конце книги). Предполагается, что читатель сначала попытается решить задачу самостоятельно; в случае неудачи рекомендуется посмотреть ответ или указание и после этого продолжать думать над задачей. Только в том случае, если и после ознакомления с указанием решение задачи все-таки упорно не будет получаться, следует посмотреть решение задачи. Если задача будет решена, то следует сравнить свое решение с решением, приведенным в книге. В ряде случаев мы приводили в книге несколько различных решений задачи.

Задачи данной книги в среднем довольно трудны; решение их, как правило, будет требовать значительного времени. Более трудные задачи помечены звездочкой, а самые сложные из этих последних — двумя звездочками. Номера задач, решение которых не требует знаний, выходящих за пределы программы восьми классов средней школы, набраны курсивом; значительная часть этих задач доступна и семиклассникам.

Настоящая часть сборника «Избранные задачи и теоремы элементарной математики» написана И. М. Ягломом; около 10 задач при этом было заимствовано из рукописи покойного Д. О. Шклярского. Автор считает своим долгом выразить благодарность А. М. Яглому, немало помогавшему ему при подготовке настоящей книги, А. И. Фетисову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд замечаний, учтенных при редактировании книги, а также Т. Е. Ашкинузе и Р. А. Мирному, принявшим значительное участие в изготовлении чертежей.

И. М. Яглом

НОМЕРА ЗАДАЧ, ПРЕДЛАГАВШИХСЯ НА МОСКОВСКИ: МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ

Олимпиады проводятся в два тура: первый тур имее отборочный характер, второй является основным этапо: соревнования.

Для учащихся 7—8 классов

Олимпиада	I тур	II тур
VI (1940)	118а)	—
VII (1941)	91	67б), 102
VIII (1945)	—	14, 93
IX (1946)	5	35
XI (1948)	109	106а)
XII (1949)	—	33, 44
XIII (1950)	2	6а), 12
XIV (1951)	9а)	112а)

Для учащихся 9—10 классов

Олимпиада	I тур	II тур
I (1935)	—	66в)
II (1936)	—	76а)
III (1937)	77б)	73
IV (1938)	—	101
V (1939)	94	74
VI (1940)	83а)	36, 67а)
VII (1941)	91	18
VIII (1945)	88	10
IX (1946)	142	35, 85
X (1947)	—	17б)
XI (1948)	16	15, 52
XII (1949)	111	21, 34, 51
XIII (1950)	25, 113	6б)
XIV (1951)	63	11, 22б

ЗАДАЧИ

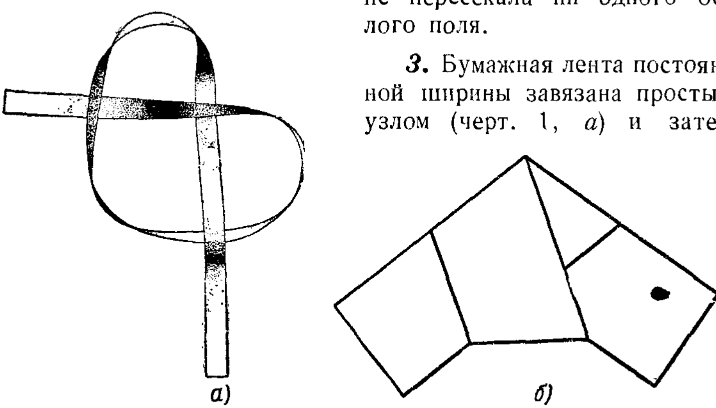
1. ЗАДАЧИ СМЕШАННОГО СОДЕРЖАНИЯ

1. Игра в монеты. Двое по очереди кладут на прямоугольный стол пятикопеечные монеты. Монеты можно класть только на свободные места (т. е. так, чтобы они не покрывали друг друга даже отчасти). Сдвигать монеты с места, на которое они положены, нельзя. Предполагается, что каждый имеет достаточное количество монет. Выигравшим считается тот, кто положит монету последним.

Как должен класть монеты начинающий игру, чтобы выиграть?

2. На шахматной доске с обычной раскраской нарисовать окружность наибольшего возможного радиуса так, чтобы она не пересекала ни одного белого поля.

3. Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом (черт. 1, *а*) и затем



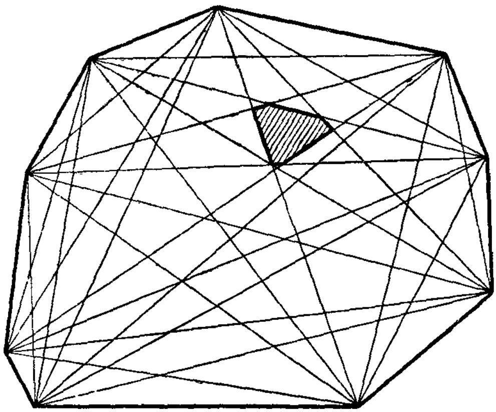
Черт. 1.

стянута так, чтобы узел стал плоским (черт. 1, *б*). Доказать, что узел имеет форму правильного пятиугольника.

4. Могут ли быть два треугольника неравными, если все углы первого треугольника равны соответствующим углам второго треугольника и две стороны первого треугольника равны двум сторонам второго треугольника?

5. Какое наибольшее число острых углов может встретиться в выпуклом многоугольнике?

6. В выпуклом многоугольнике проведены все его диагонали. Они разбивают этот многоугольник на ряд более мелких



Черт. 2.

многоугольников (черт. 2). Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник разбиения, если первоначальный многоугольник имеет

а) 13 сторон,

б)* 1950 сторон?

7. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, состоящая из

а) 13 звеньев,

б)** 1950 звеньев?

8. а) Доказать, что всякий (не обязательно выпуклый!) многоугольник можно разбить на треугольники непересекающимися диагоналями.

б) Доказать, что сумма внутренних углов всякого (не обязательно выпуклого) n-угольника равна $2d(n-2)$.

Примечание. Для случая выпуклого многоугольника предложения задач 8 а) и б) общеизвестны.

9. а) Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — два выпуклых четырехугольника с соответственно равными сторонами ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и т. д.). Доказать, что если $\angle A > \angle A'$, то $\angle B < \angle B'$, $\angle C > \angle C'$ и $\angle D < \angle D'$.

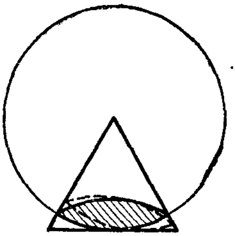
б)* Пусть $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ и $A_1'A_2'A_3' \ldots A_n'$ — два неравных выпуклых многоугольника с соответственно равными сторонами ($A_1A_2 = A_1'A_2'$, $A_3A_4 = A_3'A_4'$ и т. д.). Доказать, что в ряду разностей

$$\angle A_1 - \angle A_1',\ \angle A_2 - \angle A_2',\ \angle A_3 - \angle A_3', \ldots$$
$$\ldots, \angle A_n - \angle A_n',\ \angle A_1 - \angle A_1'$$

после исключения из него всех разностей, равных нулю, будет не меньше четырех перемен знака (т. е. переходов от положительных разностей к отрицательным или переходов от отрицательных разностей к положительным).

Примечание. Нетрудно видеть, что при $n = 4$ теорема задачи 9 б) переходит в предложение задачи 9 а).

Теорема задачи 9 б) была впервые высказана французским математиком О. Коши, который воспользовался ею для доказательства одного важного стереометрического предложения (так называемая «теорема Коши о многогранниках»). Любопытно отметить, что доказательство, которое Коши дал теореме задачи 9 б), оказалось неверным (см. по этому поводу примечание к решению настоящей задачи).



Черт.

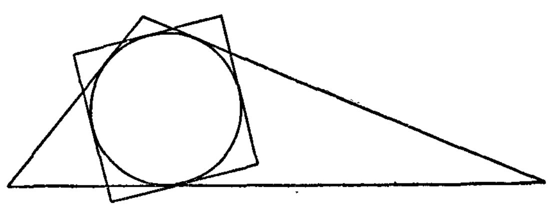
10. Окружность радиуса, равного высоте некоторого равностороннего треугольника, катится по стороне этого треугольника. Доказать, что дуга, высекаемая сторонами треугольника из окружности, все время равна 60°. Доказать также, что «линза», получаемая отражением этой дуги относительно стягивающей ее хорды (черт. 3), остается все время внутри треугольника.

11. Окружность обладает тем свойством, что внутри нее можно двигать вписанный правильный треугольник так, чтобы каждая вершина треугольника описывала эту окружность. Найти плоскую замкнутую несамопересекающуюся кривую, отличную от окружности, внутри которой тоже можно двигать правильный треугольник так, чтобы каждая его вершина описала эту кривую.

Примечание. Задачи 10 и 11, несмотря на несходство формулировок, родственны между собой. Из результата задачи 10 следует, что существуют кривые, отличные от окружности, которые могут свободно вращаться внутри правильного треугольника, соприкасаясь все время со всеми его сторонами (этим свойством будет обладать, например, линза, изображенная на черт. 3). В задаче 11 требуется найти такую отличную от окружности кривую, внутри которой может свободно вращаться правильный треугольник, скользя всеми своими вершинами по этой кривой.

Подробнее о кривых, которые могут вращаться внутри правильного треугольника, см. в книге И. М. Яглом и В. Г. Болтянский «Выпуклые фигуры», серия Библиотека математического кружка, вып. 4.

12. В треугольник вписана окружность, а вокруг нее описан квадрат (черт. 4). Доказать, что внутри треугольника находится более половины периметра квадрата.



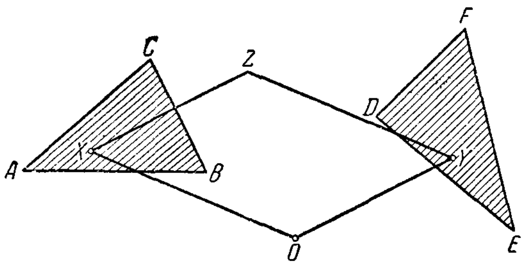
Черт. 4.

13.* Дан треугольник *ABC*. Требуется несколькими прямолинейными разрезами разбить пластинку, имеющую форму *ABC*, на такие части, чтобы этими частями, положенными на плоскость другой их стороной, можно было покрыть тот же треугольник *ABC*. Какое наименьшее число разрезов при этом придется сделать?

14. Вершины A, B и C треугольника ABC соединены с точками A_1, B_1, C_1, расположенными на противоположных сторонах (но не в вершинах).

Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не лежат на одной прямой.

15. Даны два треугольника ABC и DEF и точка O. Берется любая точка X внутри треугольника ABC и любая точка Y внутри треугольника DEF; треугольник OXY достраивается до параллелограмма $OXZY$ (черт. 5).



Черт. 5.

а) Докажите, что полученные таким образом точки Z заполняют многоугольник.

б) Сколько сторон может иметь построенный таким образом многоугольник?

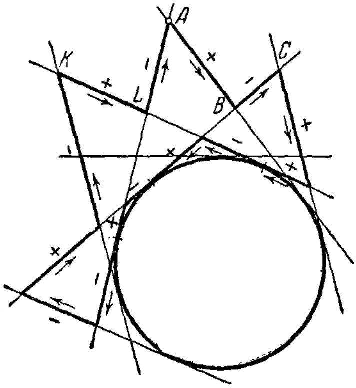
в) Докажите, что периметр полученного многоугольника равен сумме периметров исходных треугольников.

Примечание. Геометрическое место точек Z называется суммой треугольников ABC и DEF. Это название связано с тем, что по правилу сложения векторных величин («правило параллелограмма», по которому складываются силы, скорости и т. д.) вектор OZ равен сумме векторов OX и OY; основываясь на этом, говорят иногда также, что точка Z равна сумме точек X и Y (при заданном «начале отсчета векторов» O).

Сложение фигур, подобное тому, которое определено в задаче 15, играет значительную роль в некоторых разделах современной геометрии.

См. по этому поводу § 4 книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского, цитированной на стр. 10.

16. Дана окружность и точка A вне ее; из этой точки мы совершаем путь по некоторой замкнутой ломаной, состоящей из отрезков прямых, касательных к окружности, и заканчиваем путь в начальной точке A (черт. 6). Участки пути, по которым мы приближаемся к центру окружности, берем со знаком «плюс», а участки, по которым удаляемся от центра,— со знаком «минус». Доказать, что алгебраическая сумма длин участков пути, взятых с указанными знаками, равна нулю.



Черт. 6.

17. а) На плоскости даны пять точек A, B, C, D, E, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что из них можно выбрать четыре точки, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.

б) Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ расположен выпуклый четырехугольник $A_5A_6A_7A_8$; внутри $A_5A_6A_7A_8$ взята точка A_9. Доказать, что если из девяти точек A_1, A_2, ..., A_9 никакие три не лежат на одной прямой, то из них можно выбрать пять, лежащих в вершинах выпуклого пятиугольника.

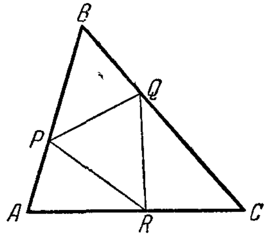
Примечание. Можно доказать, что если вообще на плоскости даны произвольные девять точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой), то из них можно выбрать пять точек, являющихся вершинами выпуклого пятиугольника; с другой стороны, можно указать такие восемь точек плоскости, что никакие пять из этих точек не являются вершинами выпуклого пятиугольника. Точно так же можно доказать, что наименьшее число точек плоскости (никакие три из которых не лежат на одной прямой), из которых всегда можно выбрать 6, являющихся вершинами выпуклого шестиугольника, равно 17. (Заметим, что доказательство этого предложения является весьма сложным.) Существует предположение, что наименьшее число N, такое, что из N точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, всегда можно выбрать n, являющихся вершинами выпуклого n-угольника, дается формулой

$$N = 2^{n-2} + 1$$

(при $n = 3, 4, 5, 6$ получаем $N = 3, 5, 9, 17$); однако это предположение до сих пор еще никем не доказаио и не опровергнуто.

*18**. На плоскости дано некоторое число точек, каждые три из которых можно заключить в круг радиуса 1. Доказать, что все эти точки можно заключить в круг радиуса 1.

19. В треугольник ABC вписан треугольник PQR. Доказать, что площадь хотя бы одного из треугольников BPQ, APR, CRQ (черт. 7) не превосходит площади треугольника PQR.



Черт. 7.

20. Доказать, что любое треугольное сечение треугольной пирамиды по площади меньше хотя бы одной ее грани.

*21**. В данный треугольник поместить центрально-симметричный многоугольник наибольшей возможной площади.

Примечание. Задача 21 связана с определением «степени центральности» плоской фигуры. В некоторых случаях оказывается нужным заменить данную фигуру F меньшей центрально-симметричной фигурой; при этом требуется выбрать эту меньшую фигуру F' возможно большей (этот вопрос может возникнуть из практических потребностей при раскрое материала). Отношение площади F' к площади F называется степенью центральности F; очевидно, степень центральности не превосходит единицы и равна единице в том (и только в том) случае, когда фигура F центрально-симметрична. См. по этому поводу задачу 33 книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского, цитированной на стр. 10.

22. а) Две точки A и B плоскости, расстояние между которыми равно 1, соединены выпуклой ломаной $AP_1 \ldots P_nB$ (т. е. такой ломаной, что многоугольник $AP_1P_2 \ldots P_nB$ — выпуклый). Доказать, что если сумма внешних углов ломаной при точках $P_1, P_2, \ldots, P_n$ равна $\alpha < 180°$, то длина ломаной не превосходит $\dfrac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

б) Из всех выпуклых многоугольников, у которых одна сторона равна a и сумма внешних углов при вершинах, не прилегающих к этой стороне, равна 120°, найти многоугольник наибольшей площади.

23. Доказать, что ни один из треугольников, вписанных в выпуклый многоугольник M, не может иметь бо́льшую площадь, чем наибольший (по площади) из всех треугольников, вершины которых совпадают с тремя какими-то вершинами M.

Примечание. Теорема задачи 23 указывает решение следующей задачи: *вписать в данный многоугольник треугольник наибольшей возможной площади.* Для этого надо рассмотреть все треугольники, вершины которых совпадают с какими-либо тремя вершинами данного многоугольника (таких треугольников будет конечное число) и выбрать из них наибольший.

24. В пространстве даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Доказать, что наибольшим расстоянием между точками треугольника ABC и точками треугольника $A'B'C'$ будет наибольший из девяти отрезков AA', AB', AC', BA', BB', BC', CA', CB', CC'.

25. Пусть ABC некоторый треугольник и $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ (углы измеряются в радианах). Доказать, что

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

Примечание. Для тетраэдра (т. е. произвольной треугольной пирамиды) имеет место неравенство, близкое к неравенству задачи 25. А именно, если a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 — длины ребер некоторого тетраэдра и α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 — величины соответствующих двугранных углов, измеренные в радианах, то

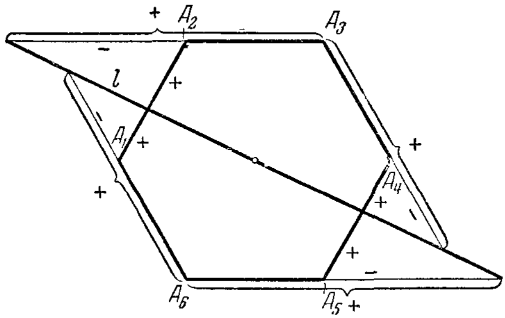
$$\frac{\pi}{3} < \frac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + a_5\alpha_5 + a_6\alpha_6}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6} < \frac{\pi}{2}.$$

Однако доказательство этого неравенства очень сложно.

26. а) Доказать, что по крайней мере одно из оснований перпендикуляров, опущенных из внутренней точки выпуклого многоугольника на его стороны, лежит на самой стороне, а не на ее продолжении.

б) Доказать, что по крайней мере одно из оснований перпендикуляров, опущенных из внутренней точки выпуклого многогранника на его грани, лежит на самой грани, а не на ее продолжении.

27. а) Через центр правильного n-угольника проведена прямая l, не проходящая ни через одну из вершин многоугольника и не параллельная ни одной из сторон (черт. 8). Эта прямая определяет на сторонах многоугольника $2n$ отрезков, считая от вершин многоугольника до точек пересечения прямой l с соответствующими сторонами (или их продолжениями). Каждому из этих отрезков припишем знак,



Черт. 8.

считая этот отрезок положительным, если его направление (от вершины A_i многоугольника до точки пересечения соответствующей стороны с l) совпадает с направлением соответствующей стороны (от вершины A_i до вершины A_{i+1} или A_{i-1}), и отрицательным в противном случае (черт. 8). Доказать, что сумма обратных величин рассматриваемых $2n$ отрезков, взятых с соответствующими знаками, не зависит от выбора прямой l.

б) Через центр правильного многогранника, имеющего n ребер, проведена плоскость П, не проходящая ни через одну из вершин многогранника и не параллельная ни одному из ребер. Эта плоскость определяет на ребрах многогранника $2n$ отрезков, считая от вершин многогранника до точек пересечения соответствующего ребра с плоскостью П. Каждому из отрезков припишем знак, считая этот отрезок положительным, если его направление совпадает с направлением соответствующего ребра, и отрицательным в противном случае. Доказать, что сумма обратных величин всех отрезков, взятых с соответствующими знаками, не зависит от выбора плоскости П.

28. На стороне A_1A_2 правильного n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ взята точка M_1. Эта точка проектируется из вершины A_n в точку M_2 стороны A_2A_3 или ее продолжения (т. е. M_2 есть точка пересечения прямой A_nM_1 с прямой A_2A_3); затем точка M_2 проектируется из вершины A_1 в точку M_3 стороны A_3A_4; точка M_3 проектируется из вершины A_2 в точку M_4 стороны A_4A_5 и т. д. При этом процесс не останавливается после одного обхода всех сторон n-угольника, а продолжается неограниченно. Доказать, что

а) если $n=4$, то точка M_{13} стороны A_1A_2, которая получается после трехкратного обхода всех сторон многоугольника, совпадает с M_1 (и, следовательно, M_{14} совпадает с M_2, M_{15} совпадает с M_3 и т. д.);

б) если $n=6$, то точка M_{13} стороны A_1A_2, которая получается после двукратного обхода всех сторон многоугольника, совпадает с M_1 (а значит, M_{14} совпадает с M_2, M_{15} совпадает с M_3 и т. д.);

в) если $n=10$, то точка M_{11} стороны A_1A_2, которая получается после однократного обхода всех сторон многоугольника, совпадает с M_1 (и, значит, M_{12} совпадает с M_2, M_{13} совпадает с M_3 и т. д.).

Примечание. Можно доказать, что если n отлично от 4, 6 и 10, то ни одна из точек M_{kn+1}, $k=1, 2, 3, \ldots$, которые получаются описанным образом на стороне A_1A_2, не будет совпадать с исходной точкой M_2, т. е. процесс будет продолжаться неограниченно без того, чтобы полученные точки начали повторяться.

29. Отрезок длины 1 полностью покрыт некоторым числом лежащих на нем меньших отрезков. Доказать, что среди этих отрезков можно найти непересекающиеся между собой отрезки, сумма длин которых больше или равна $^1/_2$.

30. Плоскость полностью покрыта некоторым числом полуплоскостей. Доказать, что среди этих полуплоскостей можно выбрать три, которые в совокупности уже покрывают всю плоскость.

31. а) Имеется некоторое число полуплоскостей, каждые три из которых имеют общую точку. Доказать, что существует точка, которая принадлежит одновременно всем полуплоскостям.

б) На плоскости задано некоторое число выпуклых многоугольников, каждые три из которых имеют общую точку. Доказать, что все многоугольники имеют общую точку.

Примечание. Теорема задачи 31 б) может быть еще обобщена. См. по этому поводу § 2 книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского, цитированной на стр. 10.

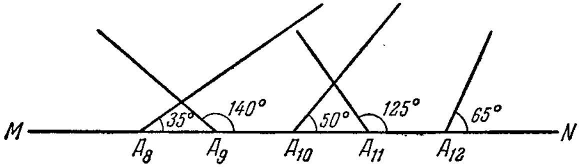
32. а) Внутри квадрата $ABCD$ со стороной 1 расположен выпуклый многоугольник M, площадь которого больше $1/2$. Доказать, что найдется прямая l, параллельная произвольно выбранной стороне квадрата и пересекающая многоугольник M по отрезку длины, большей $1/2$.

б)* Внутри квадрата $ABCD$ со стороной 1 расположена самонепересекающаяся ломаная L, длина которой больше 1000. Докажите, что найдется прямая l, параллельная одной из сторон квадрата и пересекающая ломаную L больше, чем в 350 точках.

33. Существуют фигуры, имеющие бесконечное множество центров симметрии (например, полоса между двумя параллельными прямыми). Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

34. Доказать, что если у многоугольника есть несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

35. Из тридцати пунктов $A_1, A_2, \ldots, A_{30}$, расположенных на прямой MN на равных расстояниях друг от друга,



Черт. 9.

выходят тридцать прямых дорог. Дороги располагаются по одну сторону от прямой MN и образуют с MN углы (черт. 9):

№№ начального пункта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол дороги с прямой MN	60°	30°	15°	20°	155°	45°	10°	35°	140°	50°
№№ начального пункта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Угол дороги с прямой MN	125°	65°	85°	86°	80°	75°	78°	115°	95°	25°
№№ начального пункта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Угол дороги с прямой MN	28°	158°	30°	25°	5°	15°	160°	170°	20°	158°

Из всех тридцати пунктов выезжают одновременно тридцать автомобилей, едущих (никуда не сворачивая) по этим дорогам с постоянной скоростью (одной и той же для всех автомобилей). На каждом из перекрестков установлено по шлагбауму. Как только первая по времени машина проезжает перекресток, шлагбаум закрывается и преграждает путь всем следующим машинам, попадающим на этот перекресток. Какие из машин проедут все перекрестки на своем пути и какие застрянут?

Изменится ли ответ, если не предполагать равными расстояния между двумя последовательными точками?

Примечание. Любопытно отметить, что задача 35, имеющая, казалось бы, совершенно искусственное, чисто «игрушечное» условие, возникла из решения практических запросов кристаллографии (кристаллы растут в случайных направлениях; если кристаллы тонкие и длинные, то эти направления задаются углами, образуемыми кристаллами с первоначальной поверхностью кристаллической массы; кристалл, выросший до определенного размера, запирает путь всем наталкивающимся на него растущим кристаллам, что соответствует закрытию шлагбаума в условии задачи).

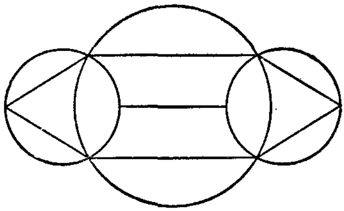
36. На бесконечном конусе, угол развертки которого равен α, взята точка. Из этой точки в обе стороны проводится перпендикулярно к образующей конуса линия так, что после развертки конуса эта линия превращается в отрезки прямых. Определить число самопересечений этой линии на поверхности конуса.

Примечание. Эта задача возникла из важного для многих практических задач вопроса о геодезических линиях на кривых поверхностях, т. е. линиях, представляющих собой кратчайший путь по поверхности из одной ее точки в другую. Так как прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками, то линия, изображаемая на развертке конуса отрезками прямых, очевидно будет геодезической конуса. См. по этому поводу книгу Л. А. Люстерник «Геодезические линии», М.—Л., Гостехиздат, 1940.

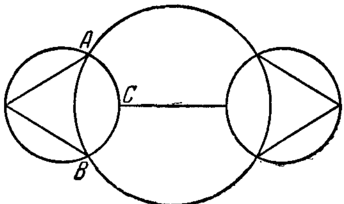
37. а) Плоскость покрыта сеткой квадратов. Можно ли построить равносторонний треугольник с вершинами в вершинах сетки?

б) В пространстве задана правильная решетка из кубов. Можно ли построить правильный тетраэдр, вершины которого совпадают с вершинами решетки?

38. а) Доказать, что если фигуру можно начертить одним росчерком пера (т. е. не отрывая пера от бумаги и не проводя два раза одной и той же линии), то она имеет не более двух узлов, в которых сходится нечетное число линий. Обратно, каждую фигуру, имеющую не больше двух узлов, в которых сходится нечетное число линий, можно начертить одним росчерком пера.



а)



б)

Черт. 10.

Так, например, фигуру, изображенную на черт. 10, *а*, можно начертить одним росчерком пера, а фигуру, изображенную на черт. 10, *б*, одним росчерком пера начертить нельзя (A, B и C — три узла этой фигуры, в которых сходится нечетное число линий).

б) Доказать, что Москву можно обойти так, чтобы пройти по каждой улице ровно два раза, и нельзя обойти так, чтобы пройти по каждой улице ровно три раза.

2. ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ, СВЯЗАННЫЕ С РАСПОЛОЖЕНИЕМ ТОЧЕК И ФИГУР

В задачах этого цикла неоднократно используется понятие диаметра плоской фигуры. Диаметром фигуры называется наибольшее расстояние между точками фигуры (аналогично тому как диаметр круга есть наибольшее расстояние между точками круга).

Решения задач 39, 40, 47, 53 для случая произвольного n и решение задачи 55 для произвольного числа n киосков неизвестны; кое-какие указания, относящиеся к большим значениям n, приведены в конце решений этих задач.

39. Известно, что расстояние между каждыми двумя из заданных n ($n=2$, 3, 4, 5) точек плоскости не меньше 1. Какое наименьшее значение может иметь диаметр этой системы точек?

40.** Какое наименьшее значение может иметь диаметр выпуклого n-угольника ($n=4$, 5, 6), все стороны которого равны 1?

41. Диаметр замкнутой (может быть, самопересекающейся) n-звенной ломаной, все звенья которой имеют длину 1, разумеется, не может быть меньше 1. При каких n диаметр ломаной может равняться 1?

42*. Очевидно, что всякую систему точек диаметра 1 можно заключить в круг радиуса 1: для этого достаточно, чтобы центр круга совпал с какой-либо точкой фигуры. Чему равен радиус наименьшего круга, внутрь которого можно заключить всякую систему точек диаметра 1?

43. Очевидно, что всякую фигуру диаметра 1 можно заключить внутрь квадрата со стороной 2: для этого достаточно, чтобы центр квадрата совпал с какой-либо точкой фигуры. Чему равна сторона наименьшего квадрата, внутрь которого можно заключить всякую фигуру диаметра 1?

Примечание. Можно также поставить задачу, аналогичную задачам 42 и 43, заменив квадрат (задача 43) или круг (задача 42) какой-либо другой фигурой. Так, например, можно показать, что наименьший правильный треугольник, внутрь которого можно заключить любую фигуру диаметра 1, есть треугольник со стороной $\sqrt{3}$, а наименьший правильный шестиугольник, обладающий аналогичным свойством — шестиугольник со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (см. по этому поводу задачу 31 из книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского, цитированной на стр. 10).

44. Очевидно, что всякую плоскую замкнутую ломаную периметра 1 можно заключить в круг радиуса $^1/_2$: для этого достаточно, чтобы центр O круга совпал с какой-либо точкой ломаной (ибо в этом случае для любой точки A ломаной длина одного из двух кусков ломаной с концами O и A не превосходит $^1/_2$ и, следовательно, расстояние OA и подавно не превосходит $^1/_2$). Чему равен радиус наименьшего круга, внутрь которого можно заключить каждую плоскую замкнутую ломаную периметра 1?

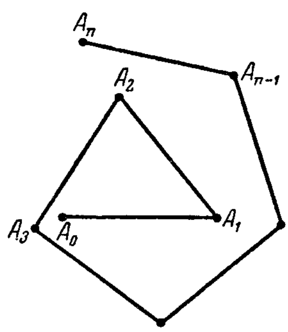
45*. На плоскости дана ломаная $A_0A_1A_2\ldots A_n$ такая, что

$$A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = 1$$

и

$$60^\circ \leqslant \angle A_0A_1A_2 \leqslant \angle A_1A_2A_3 \leqslant \angle A_2A_3A_4 \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n \leqslant 120^\circ;$$

при этом каждые два звена ломаной, соседние с одним и тем же звеном, расположены по одну сторону от него (черт. 11). Доказать, что, каково бы ни было число звеньев ломаной, она никогда ни может выйти за пределы круга радиуса 4 с центром в точке A_0.



Черт. 11.

46. Пусть A и B — две точки, заключенные внутри кольца, образованного концентрическими окружностями радиусов R и r; расстояние AB равно 1.

Чему равен наименьший угол, под которым отрезок AB может быть виден из центра кольца?

47. Чему равен радиус наименьшего круга, внутри которого можно поместить n точек ($n = 2, 3, 4, \ldots, 10, 11$), одна из которых совпадает с центром круга так, чтобы расстояние между каждыми двумя точками было не меньше 1?

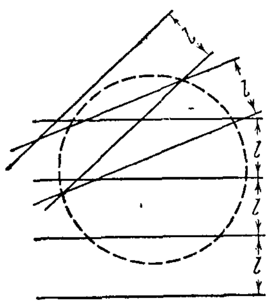
48*. Сколько точек можно поместить внутри круга радиуса 2 так, чтобы одна из точек совпадала с центром круга и расстояния между каждыми двумя точками были не меньше 1?

49. Сколько кругов радиуса 1 можно приложить[1]) к данному единичному кругу S так, чтобы никакие два из этих кругов не пересекались? Чтобы ни один из этих кругов не содержал внутри себя центр другого круга?

50*. Каково наибольшее число кругов радиуса 1, которые можно расположить на плоскости так, чтобы все они пересекали некоторый фиксированный единичный круг S и ни один из них не содержал внутри себя центр S или центр другого круга?

51. Каково наибольшее число квадратов со стороной 1, которое можно приложить[1]) к данному единичному квадрату K так, чтобы никакие два из них не пересекались?

52. Каково наибольшее возможное число лучей в пространстве, выходящих из одной точки и образующих попарно тупые углы?



Черт. 12.

53*. Как поместить на сфере n ($n=2$, 3, 4, 5, 6) точек так, чтобы расстояние между ближайшими двумя из этих n точек было наибольшим?

54. Каково наименьшее число кругов, которыми можно полностью покрыть круг вдвое большего радиуса?

55. Как разместить на круглой площади три киоска с мороженым наивыгоднейшим образом, т. е. так, чтобы наибольшее расстояние от точек площади до ближайшего киоска было бы возможно меньшим?

---

[1]) Фигуры называются «приложенными» друг к другу, если они не налегают одна на другую, но границы их соприкасаются хотя бы в одной точке.

56*. Каково наименьшее число полос ширины l, которыми можно полностью покрыть круг радиуса R (черт. 12)?

Примечание. Интересно отметить, что решение задачи о наименьшем числе полос, которыми можно полностью покрыть какую-либо отличную от круга фигуру, например треугольник, является очень трудным и было найдено лишь в 1950—1951 гг. после многочисленных безуспешных попыток различных математиков.

3. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ И НА НАХОЖДЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ

57. В плоскости даны две параллельные прямые l и l_1. С помощью одной линейки

а) разделить пополам данный отрезок AB прямой l;

б) провести через данную точку M прямую, параллельную прямой l;

в) увеличить данный отрезок AB прямой l в 2, 3, ..., n раз;

г)* разделить данный отрезок AB прямой l на 3, 4, ..., n равных частей.

58. Даны окружность C (центр которой не указан) и точка M. С помощью одной линейки провести через точку M прямую, перпендикулярную к данному диаметру AB окружности C. Рассмотреть отдельно случаи, когда точка M расположена на окружности C или на диаметре AB.

59. В плоскости даны окружность C с центром O, прямая l и точка M. С помощью одной линейки провести через точку M

а) прямую, параллельную l;

б) прямую, перпендикулярную к l.

60. В плоскости даны квадрат $ABCD$, прямая l и точка M. С помощью одной линейки

а) провести через точку M прямую, параллельную l;

б) опустить из точки M перпендикуляр на прямую l.

61. Данный отрезок AB длины a разделить на 2, 3, ..., n равных частей, используя циркуль постоянного раствора a и линейку.

62. С помощью одного циркуля

а) увеличить данный отрезок AB в n раз[1]);

б) разделить данный отрезок AB на n равных частей;

в) определить центр данной окружности C.

63. На плоскости даны три точки A, B и C. С помощью только линейки и транспортира найти точку M, из которой стороны AB, BC и CA треугольника ABC видны под данными углами α, β и γ; $\alpha+\beta+\gamma=360°$. (Транспортир позволяет в любой точке заданной прямой построить угол, равный другому данному углу.)

Примечание. Построения с помощью линейки и транспортира встречаются в ряде практических задач, связанных с измерениями на местности (геодезические инструменты дают возможность прокладывать на местности прямые и измерять углы, но не проводить окружности). В частности, задача 63 играет в геодезической практике весьма значительную роль.

64. Даны прямая l и точка M на этой прямой. С помощью двухсторонней линейки (линейки с параллельными краями) без циркуля восставить из точки M перпендикуляр к прямой l.

65. Вписать в данный треугольник ABC треугольник, равный другому данному треугольнику PQR.

66. Построить треугольник ABC, зная три точки P, Q, R, в которых пересекают описанную около треугольника окружность

а) биссектрисы треугольника;

б) высоты треугольника;

в) высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины.

67. Построить треугольник ABC, зная три точки, симметричные относительно сторон треугольника

а) центру описанного круга;

б) ортоцентру (точке пересечения высот).

68. а) На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты. Построить треугольник, зная три точки A_1, B_1, C_1, являющиеся центрами этих квадратов.

---

[1]) То-есть найти на отрезке AB такую точку C, что $AC=n\cdot AB$.

б)* На сторонах треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники. Построить треугольник, зная три точки A_1, B_1, C_1, являющиеся вершинами этих треугольников.

69. Построить треугольник ABC, зная положение трех точек, являющихся

а) основаниями высот треугольника ABC;

б) центрами вневписанных окружностей треугольника ABC;

в) центрами описанной окружности, вписанной окружности и одной из вневписанных окружностей.

70. На плоскости даны четыре точки. Построить

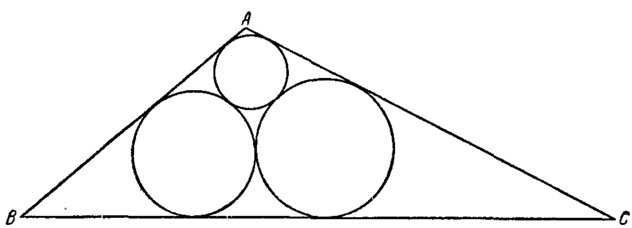
а) квадрат;

б) прямоугольник с данным отношением сторон;

в) ромб с данным острым углом, каждая сторона которого (или ее продолжение) проходила бы через одну из данных точек. Сколько решений имеет задача?

71*. На плоскости даны четыре окружности C_1, C_2, C_3 и C_4. Построить квадрат, четыре стороны (или продолжения сторон) которого касались бы данных четырех окружностей. Сколько решений может иметь задача?

Эта задача переходит в задачу 70 а), если окружности заменить точками (окружностями нулевого радиуса). Поэтому можно считать, что задача 70 а) является частным случаем задачи 71.

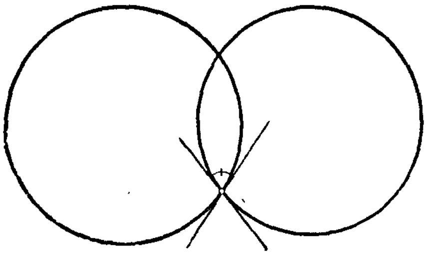


Черт. 13.

72**. Вписать в данный треугольник ABC три окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и двух других окружностей (черт. 13).

73. Даны три точки O_1, O_2 и O_3. Провести три попарно перпендикулярные окружности с центрами в этих точках.

Примечание. Углом между двумя окружностями называется угол между касательными к этим окружностям в точках пересечения (черт. 14).



Черт. 14.

*74**. Даны окружность и две точки A, B вне ее. Найти на окружности такую точку X, чтобы дуга окружности между прямыми AX и BX стягивалась хордой, параллельной данной прямой l.

75. Даны окружность с центром O, две точки A и B на ней и прямая l. Найти на окружности такую точку X, чтобы прямые AX и BX отсекали на прямой l отрезок:

а) имеющий данную длину a;

б) делящийся пополам данной точкой C прямой l.

76. Даны угол LAK и точка M. Провести через точку M прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник ABC

а) данного периметра $2p$;

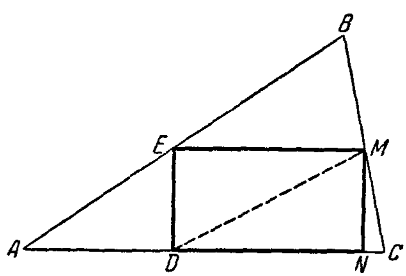
б) наименьшего возможного периметра.

77. Даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на прямой l такую точку X, чтобы сумма $AX+XB$ имела

а) наименьшую возможную длину;

б)* данную длину a.

*78**. Вписать в данный треугольник ABC прямоугольник $DEMN$ (черт. 15) так, чтобы



Черт. 15.

а) диагональ DM прямоугольника имела данную длину d;

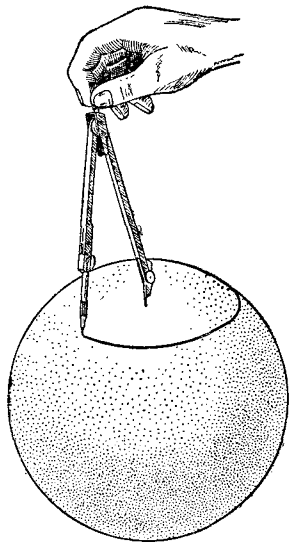
б) диагональ DM имела наименьшую возможную длину;

в) периметр прямоугольника имел данную величину $2p$;
г) площадь прямоугольника имела наибольшую величину;
д) площадь прямоугольника имела данную величину σ.

79. Построить девятиугольник так, чтобы заданные на плоскости девять точек являлись бы серединами его сторон.

80*. Вписать в данную окружность n-угольник, каждая сторона которого проходит через одну из n заданных точек плоскости.

Далее мы приведем две задачи на построения на сфере. При этом, как всегда, будем считать, что задача решается с помощью циркуля и линейки. С помощью циркуля на сфере (которую мы будем представлять себе как поверхность материального шара) можно проводить окружности, у которых известны центр и одна точка или центр и радиус (черт. 16). При помощи линейки на самой сфере нельзя, разумеется, производить никаких построений: линейку нельзя приложить к сфере; однако мы будем пользоваться линейкой (так же как и циркулем) для вспомогательных построений на плоскости.


Черт. 16.

81. С помощью циркуля и линейки определить радиус материального шара.

82. а) На поверхности шара даны три точки. Провести на сфере окружность, проходящую через эти три точки.

б) На поверхности материального шара даны две точки, не являющиеся концами одного диаметра. Провести большой круг, проходящий через эти точки.

---

83. В плоскости даны две пересекающиеся прямые a и b. Найти геометрическое место точек,

а) разность расстояний от которых до прямых a и b равна данной величине s;

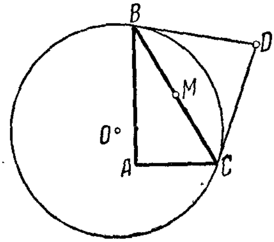
б) сумма расстояний от которых до прямых a и b равна данной величине s.

84. а) Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух противоположных сторон данного квадрата равна сумме расстояний до двух других сторон.

б) Тот же вопрос с заменой квадрата прямоугольником.

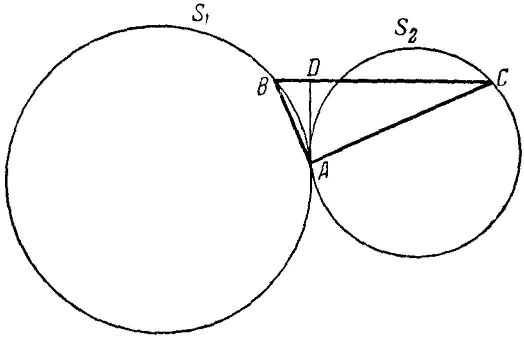
85. На сторонах PQ, QR и RP треугольника PQR взяты соответственно отрезки AB, CD и EF. Внутри треугольника дана точка Z_0. Найти геометрическое место точек Z, лежащих внутри треугольника, для которых сумма площадей треугольников ZAB, ZCD и ZEF равна сумме площадей треугольников Z_0AB, Z_0CD и Z_0EF.

Рассмотреть отдельно случай, когда $\frac{AB}{PQ}=\frac{CD}{QR}=\frac{EF}{RP}$.



Черт. 17.

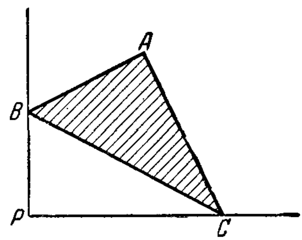
86*. Прямоугольный треугольник ABC изменяется таким образом, что вершина A прямого угла треугольника не меняет своего положения, а вершины B и C скользят по фиксированной окружности с центром O (черт. 17). Найти геометрическое место середин M стороны BC и точек D пересечения касательных к окружности в точках B и C.



Черт. 18.

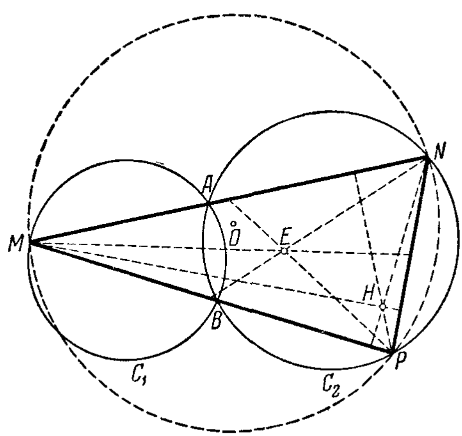
87. Прямоугольный треугольник ABC изменяется таким образом, что вершина A прямого угла треугольника не изменяет своего положения, а вершины B и C скользят соответственно по фиксированным окружностям S_1 и S_2, касающимся внешним образом в точке A (черт. 18). Найти геометрическое место оснований D высот AD треугольников ABC.

88. Прямоугольный треугольник ABC (A — прямой угол) двигается по плоскости таким образом, что вершины B и C скользят по сторонам заданного на плоскости прямого угла P (черт. 19). Доказать, что геометрическим местом точек A является отрезок. Определить длину этого отрезка.



Черт. 19.

89. Даны две окружности C_1 и C_2 (черт. 20), пересекающиеся в точках A и B. Переменную точку M окружности C_1 соединяем с точками A и B; пусть N и P есть точки пересечения прямых MA и MB с окружностью C_2.



Черт. 20.

а) Найти геометрическое место центров O окружностей, описанных около получающихся при этом треугольников

MNP; точек H пересечения высот треугольников MNP; точек E пересечения медиан этих треугольников.

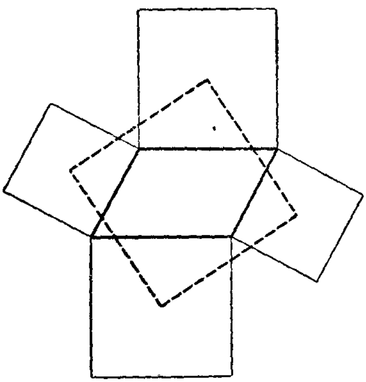
б) Доказать, что прямая NP все время остается касательной к некоторой фиксированной окружности.

90*. а) Найти геометрическое место точек M таких, что треугольник, вершинами которого служат проекции точки M на стороны заданного треугольника ABC, имеет данную площадь σ.

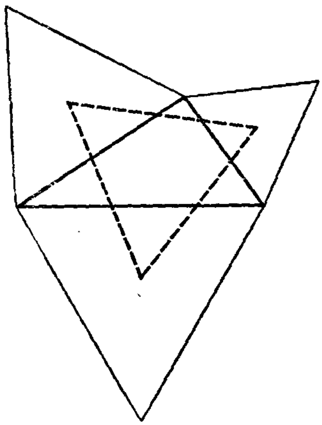
б) Найти геометрическое место точек M таких, что многоугольник, вершинами которого служат проекции точки M на стороны заданного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, имеет данную площадь σ.

4. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

91. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты (черт. 21). Доказать, что их центры сами образуют квадрат.



Черт. 21.



Черт. 22.

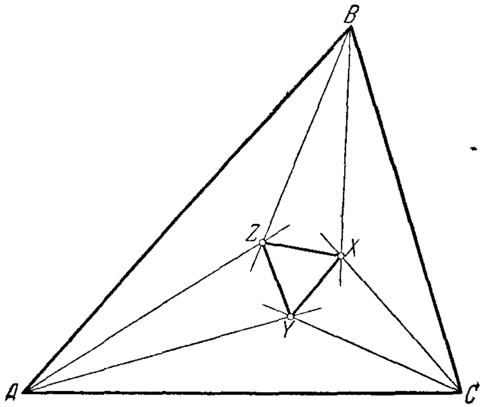
92. На сторонах произвольного треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Доказать, что их центры сами образуют равносторонний треугольник (черт. 22).

93. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Доказать, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ, которая равна $\frac{1}{n+1}$ всей диагонали.

94. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

95. Определить углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота делят угол на четыре равные части.

96. Доказать, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то он равнобедренный.



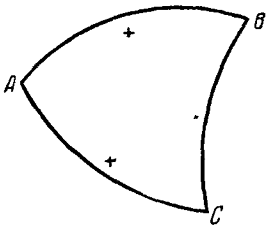
Черт. 23.

97. Углы произвольного треугольника ABC разделены на три равные части прямыми AY, AZ; BZ, BX; CX, CY (черт. 23). Доказать, что треугольник XYZ — равносторонний.

98. Доказать, что в любом треугольнике точка пересечения медиан, ортоцентр (точка пересечения высот) и центр описанного круга лежат на одной прямой (прямая Эйлера).

99. Доказать, что в любом треугольнике три середины сторон, три основания высот и три точки, делящие пополам отрезки высот от ортоцентра до вершины, лежат на одной окружности (окружность девяти точек).

100. Каждой стороне кругового треугольника ABC (т. е. фигуры, образованной тремя пересекающимися дугами окружностей; черт. 24) отнесем знак «плюс» или «минус» в зависимости от того, обращена ли соответствующая дуга окружности выпуклостью во внешнюю или во внутреннюю сторону треугольника. Доказать, что сумма углов кругового треугольника минус сумма сторон (углы и стороны измерены в радианной мере), взятых с соответствующими знаками, равна π. (Углами кругового многоугольника называются углы между касательными к окружностям в вершинах треугольника; см. выше примечание к задаче 73.)



Черт. 24.

Примечание. Обозначив углы кругового треугольника ABC через A, B и C, длины сторон — через a, b и c и радиусы дуг, служащих сторонами,— через r_a, r_b и r_c, мы сможем записать теорему задачи 100 в виде формулы

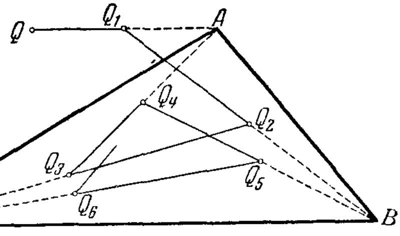
$$A+B+C \mp \frac{a}{r_a} \mp \frac{b}{r_b} \mp \frac{c}{r_c} = \pi, \qquad (*)$$

где знаки «—» и «+» ставятся в зависимости от того, в какую сторону обращена выпуклостью соответствующая сторона. (Угловая мера дуги длины a, принадлежащей окружности радиуса r_a, равна в радианном измерении $\frac{a}{r_a}$.) Прямолинейный треугольник можно рассматривать как предельный случай кругового, если считать прямые «окружностями бесконечно большого радиуса». С этой точки зрения формулу (*) можно считать обобщением теоремы о сумме углов прямолинейного треугольника.

101. Пусть точка A_1 симметрична некоторой точке A плоскости относительно заданной точки O_1; точка A_2 симметрична точке A_1 относительно другой точки O_2; точка A_3

симметрична точке A_2 относительно третьей точки O_3. Далее, пусть точка A_4 симметрична A_3 относительно O_1; точка A_5 симметрична A_4 относительно O_2 и точка A_6 симметрична A_5 относительно O_3. Доказать, что A_6 совпадает с A.

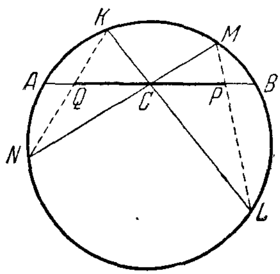
102. Дан треугольник ABC. Точка M, расположенная внутри треугольника, движется параллельно стороне BC до пересечения со стороной CA, затем движется параллельно AB до пересечения со стороной BC, затем — параллельно AC до пересечения с AB и т. д. Доказать, что через некоторое число таких шагов точка вернется в исходное положение, и найти это число шагов.



Черт. 25.

103. Точка Q движется прямолинейно к вершине A треугольника ABC. На половине пути она сворачивает и движется к вершине B, на половине пути сворачивает и движется к вершине C; на половине этого пути она снова сворачивает к A и т. д. (черт. 25).

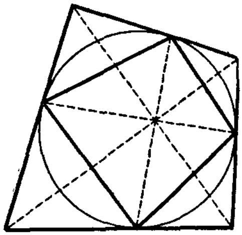
Доказать, что существует треугольник, на который точка Q стремится попасть. Построить этот треугольник и вычислить его площадь, если площадь треугольника ABC равна S.



Черт. 26.

104. Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две секущие KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB), KN пересекает AB в точке Q, ML — в точке P (черт. 26). Доказать, что $QC = CP$.

105. Доказать, что точка пересечения диагоналей описанного вокруг окружности четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон первого четырехугольника с окружностью (черт. 27).



Черт. 27.

Примечание. См. ниже примечание к задаче 130.

106. а) Доказать, что в любом треугольнике имеет место неравенство $R \geqslant 2r$ (R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей), причем равенство имеет место только для правильного треугольника.

б) Обратно, если отрезки R и r связаны соотношением $R \geqslant 2r$, то они являются радиусами вписанной и описанной окружностей для некоторого треугольника.

107. Какая зависимость должна существовать между радиусами R и r и расстоянием d между центрами двух окружностей, для того чтобы можно было построить треугольник, вписанный в первую окружность и описанный около второй окружности?

108.* Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность S и описанный вокруг окружности s. Какая зависимость существует между радиусами R и r окружностей S и s и расстоянием d между их центрами?

109. Доказать, что если у шестиугольника противоположные стороны параллельны и три диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны между собой, то вокруг этого шестиугольника можно описать окружность.

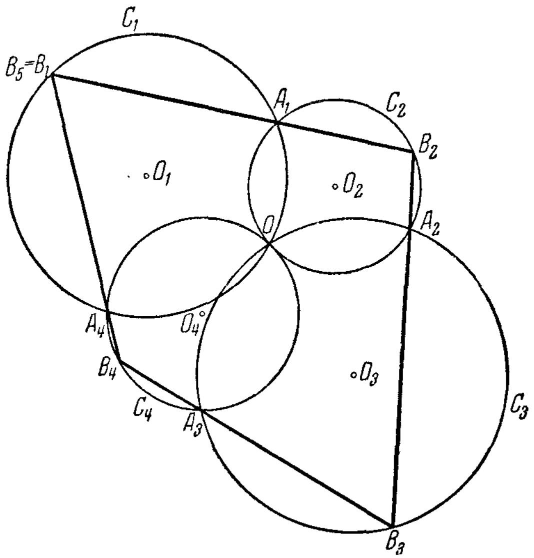
110. Доказать, что если три диагонали вписанного шестиугольника служат диаметрами описанного круга, то площадь этого шестиугольника равна удвоенной площади треугольника со сторонами, равными трем остальным диагоналям.

111. В произвольном выпуклом шестиугольнике соединены через одну середины сторон. Доказать, что точки пересечения медиан двух образовавшихся треугольников совпадают.

112. а) На плоскости даны равнобедренная трапеция $A_1A_2A_3A_4$ и точка P. Доказать, что из отрезков A_1P, A_2P, A_3P и A_4P можно построить четырехугольник.

б)* На плоскости даны правильный n-угольник $A_1A_2...A_n$ и точка P. Доказать, что из отрезков A_1P, $A_2P, \ldots, A_nP$ можно построить n-угольник.

Примечание. Если $n=3$, то из того, что из отрезков PA_1, PA_2, PA_3 можно сложить треугольник при любом положении точки P на плоскости, следует, что треугольник $A_1A_2A_3$ обязательно правильный. В самом деле, если, например, $A_1A_2 > A_1A_3$, то достаточно выбрать точку P совпадающей с A_1 (или достаточно близкой к A_1), чтобы отрезки PA_1, PA_2 и PA_3 не являлись сторонами никакого треугольника, так как $PA_2 > PA_1 + PA_3$. При $n > 3$ из того, что из отрезков $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$ всегда можно сложить многоугольник, уже не следует, что n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный (см. задачу 112 а)).

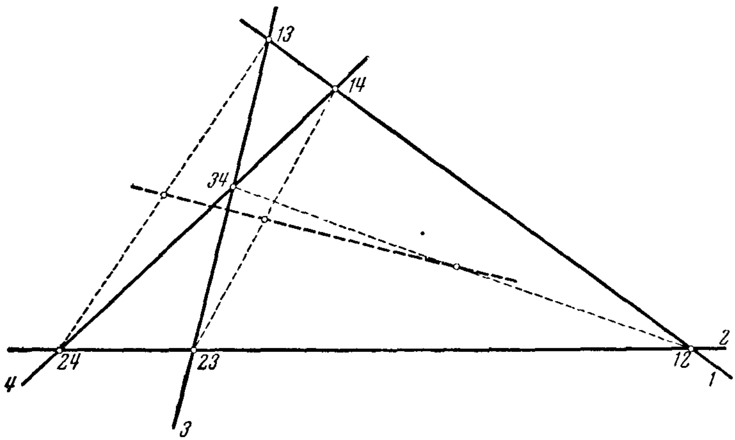


Черт. 28.

113. Дано n окружностей $C_1, C_2, \ldots, C_n$, проходящих через одну точку O (черт. 28). Вторые точки пересечения C_1 с C_2, C_2 с $C_3, \ldots, C_n$ с C_1 обозначим соответственно через A_1,

$A_2, \ldots, A_n$. Возьмем на C_1 произвольную точку B_1, отличную от O и от A_1. Через B_1 и A_1 проведем прямую до второго пересечения с C_2 в точке B_2. Пусть снова B_2 не совпадает с A_2. Проведем через B_2 и A_2 прямую до второго пересечения с C_3 в точке B_3. Продолжая таким же образом, мы получим точку B_n на окружности C_n. Предполагая, что B_n не совпадает с A_n, проводим через B_n и A_n прямую до второго пересечения с C_1 в точке B_{n+1}. Доказать, что B_{n+1} совпадает с B_1.

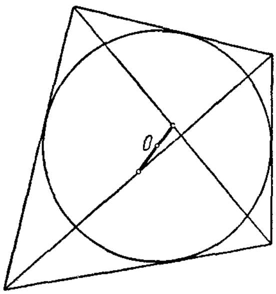
*114**. Теорема о полном четырехстороннике. Четыре прямые, из которых никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, образуют фигуру, называемую полным четырехсторонником



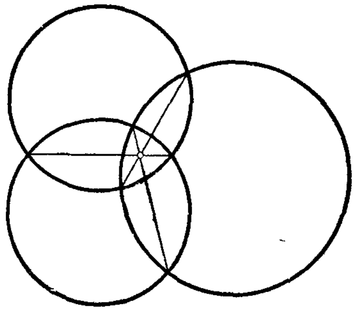
Черт. 29.

(черт. 29). Эти четыре прямые называются сторонами четырехсторонника; шесть точек попарного пересечения прямых называются вершинами четырехсторонника; отрезки, соединяющие противоположные вершины (т. е. вершины, не лежащие на одной стороне), называются диагоналями четырехсторонника. Доказать, что середины трех диагоналей полного четырехсторонника лежат на одной прямой.

*115**. Доказать, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей (черт. 30).



Черт. 30.



Черт. 31.

*116**. Даны три круга, все пересекающиеся между собой. Доказать, что три общие хорды каждых двух из этих трех окружностей пересекаются в одной точке (черт. 31).

117. Теорема Птолемея. Пусть a, b, c, d — последовательные стороны четырехугольника $ABCD$, около которого можно описать окружность, e и f — его диагонали. Доказать, что $ef = ac + bd$.

118. а) На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята точка M. Доказать, что наибольший из отрезков MA, MB и MC равен сумме двух остальных.

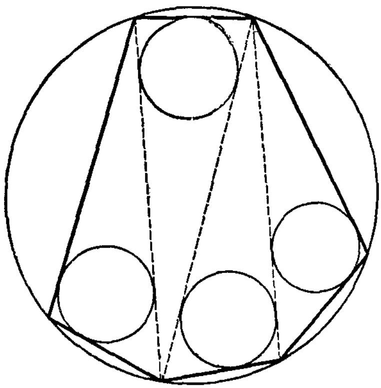
б)* Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_n$ — правильный многоугольник с нечетным числом сторон, M — произвольная точка на дуге A_1A_n окружности, описанной вокруг многоугольника. Доказать, что сумма расстояний от точки M до вершин с нечетными номерами равна сумме расстояний от M до вершин с четными номерами.

Примечание. Очевидно, теорема задачи 118 б) является обобщением предложения 118 а).

119. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ есть правильный семиугольник. Доказать, что

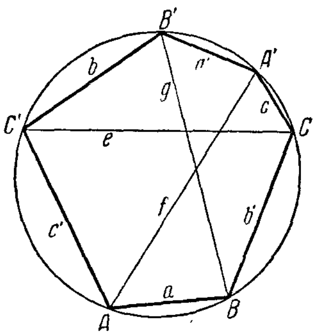
$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}.$$

120. Доказать, что алгебраическая сумма расстояний от центра описанной около треугольника окружности до его сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей (при этом, если центр описанной окружности лежит по ту же сторону от некоторой стороны, что и сам треугольник, то расстояние до этой стороны считается положительным, а в противном случае — отрицательным; таким образом, если треугольник остроугольный, то расстояния от центра описанного круга до сторон треугольника все положительны, а если треугольник тупоугольный, то расстояние от центра описанного круга до большей стороны отрицательно).



Черт. 32.

121*. Во вписанном многоугольнике проведены не пересекающиеся между собой диагонали таким образом, что многоугольник разбился на треугольники (одно из таких разбиений показано на черт. 32). Доказать, что сумма радиусов всех вписанных в эти треугольники окружностей не зависит от разбиения.

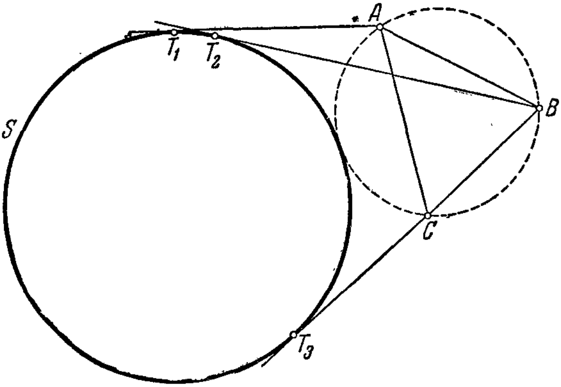


Черт. 33.

122. Пусть $ABCA'B'C'$ — вписанный в окружность шестиугольник. Стороны и диагонали AA', BB' CC' этого шестиугольника обозначим так, как указано на черт. 33. Доказать, что

$$efg = aa'e + bb'f + cc'g + abc + a'b'c'.$$

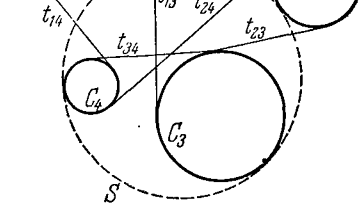
Примечание. Теорему настоящей задачи можно рассматривать как распространение теоремы Птолемея (задача 117) на шестиугольник. В том случае, когда $c=c'=0$, $e=f$, эта теорема переходит в теорему Птолемея.



Черт. 34а.

123. а) Даны три точки A, B, C и окружность S. Доказать, что если окружность S касается окружности, проходящей через точки A, B и C в точке дуги AC (черт. 34а), то длины касательных AT_1, BT_2, CT_3, проведенных соответственно из точек A, B и C к окружности S, связаны соотношением

$$AT_1 \cdot BC + CT_3 \cdot AB = BT_2 \cdot AC.$$



Черт. 34б.

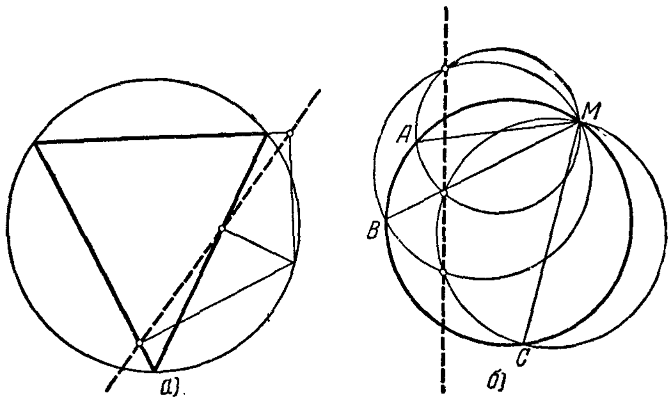
б) Докажите, что если четыре окружности C_1, C_2, C_3 и C_4 касаются пятой окружности S, причем точки касания этих окружностей с S расположены на S в том порядке, как это изображено на черт. 34б, то

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24},$$

где, например, t_{12} есть отрезок общей касательной окружностей C_1 и C_2 между точками касания. (При этом t_{12} означает отрезок общей внешней касательной окружностей C_1 и C_2, если эти окружности касаются S одинаковым образом — обе внешне или обе внутренне, — и отрезок общей внутренней касательной в противном случае; аналогичный смысл имеют отрезки t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24} и t_{34}.)

Примечание. Результат задачи 123 а) можно рассматривать как обобщение теоремы Птолемея (задача 117); он переходит в теорему Птолемея в том случае, когда радиус окружности S равен нулю, т. е. когда S есть точка. Задачу 123 б) можно считать обобщением задачи а), а следовательно, и теоремы Птолемея.

124. а) Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, лежат на одной прямой (черт. 35, *а*).

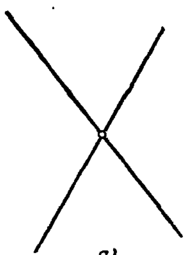


Черт. 35.

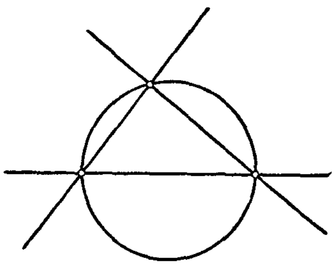
б) На трех хордах MA, MB и MC окружности, проходящих через одну точку, построены, как на диаметрах, три новые окружности. Доказать, что отличные от M точки, в которых попарно пересекаются эти последние окружности, лежат на одной прямой (черт. 35, *б*).

125. Центральной точкой двух прямых мы будем называть точку пересечения этих прямых (черт. 36, *а*);

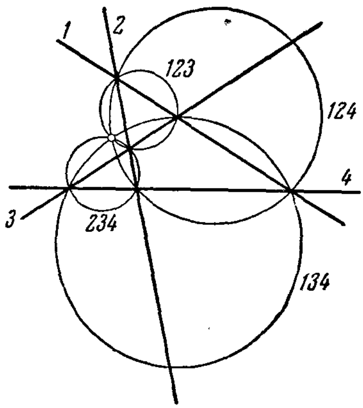
центральной окружностью трех прямых, которые не пересекаются в одной точке и никакие две из которых не параллельны,—окружность, проходящую через три центральные точки каждой пары из этих трех прямых (т. е. попросту окружность, описан-



а)



б)



в)

Черт. 36.

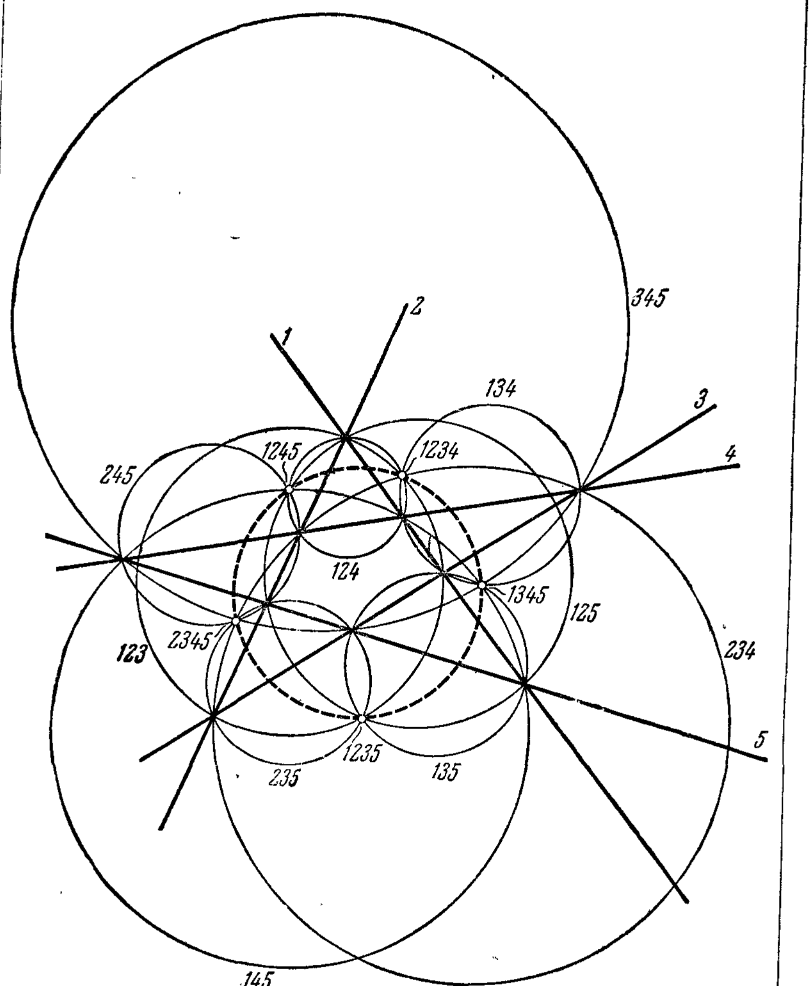
ную около треугольника, сторонами которого являются данные три прямые; черт. 36, *б*). Доказать, что

а) если на плоскости даны четыре прямые, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, то четыре центральные окружности каждых трех из четырех прямых пересекаются в одной точке (черт. 36, *в*).

Эта точка называется **центральной точкой четырех прямых.**

б)* Если на плоскости даны пять прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, то пять центральных точек каждых четырех из этих пяти прямых лежат на одной окружности (черт. 37). Эта окружность называется **центральной окружностью пяти прямых.**

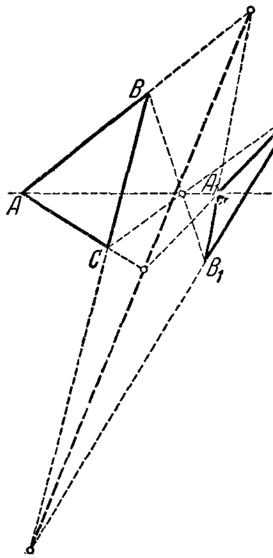
в)** Обобщить задачу на случай *n* прямых.



345
2
1
134
3
4
1245
1234
245
124
1345
125
2345
123
234
5
1235
235
135
145

Черт. 37.

*126**. На плоскости даны четыре прямые, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Доказать, что точки пересечения высот образовавшихся четырех треугольников лежат на одной прямой.

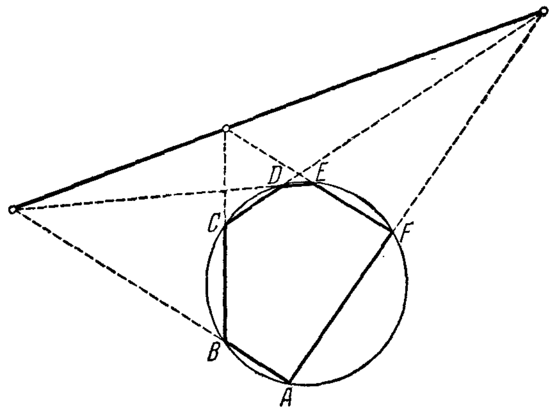


Черт. 38.

127*. Теорема Дезарга. Доказать, что если два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ расположены так, что прямые, соединяющие соответственные вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1, пересекаются в одной точке и никакие две из соответственных сторон не параллельны, то три точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой; обратно, если точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой и прямые AA', BB' и CC' не параллельны, то эти три прямые пересекаются в одной точке (черт. 38).

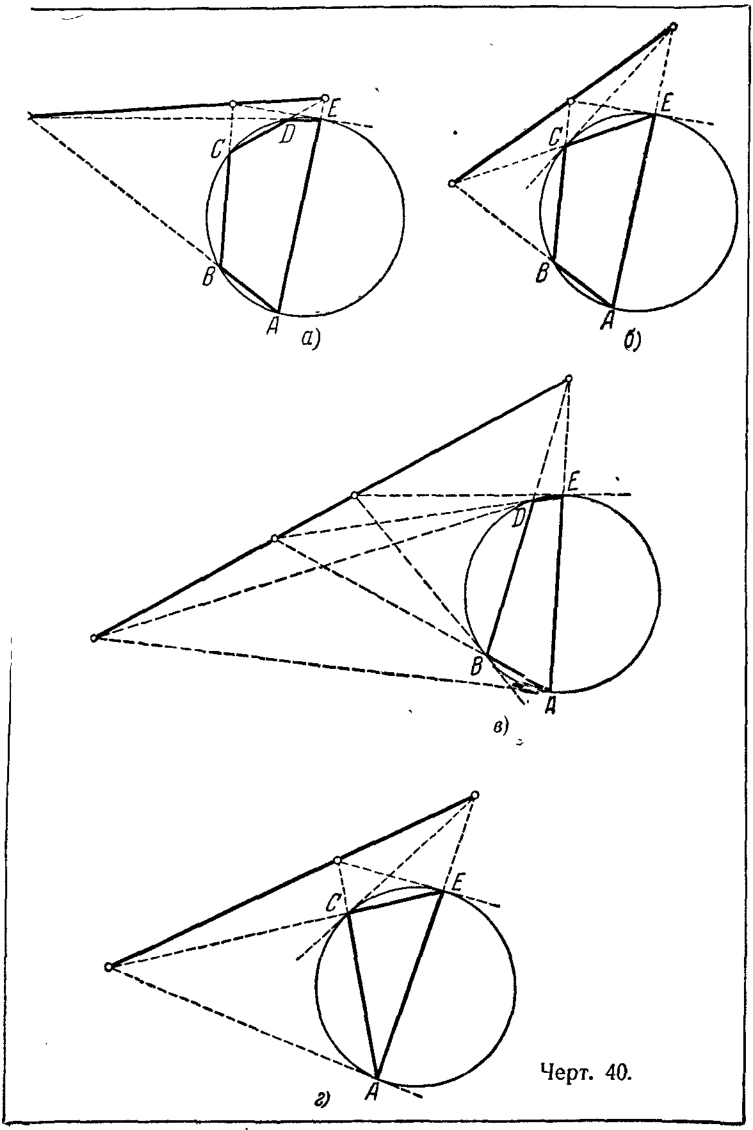
128. На плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке, и три точки. Построить треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а стороны проходят через данные точки.

*129**. Теорема Паскаля. Доказать, что если шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность и противоположные его стороны (AB и DE, BC и EF, CD и FA) не параллельны, то точки пересечения этих сторон лежат на одной прямой (черт. 39).



Черт. 39.

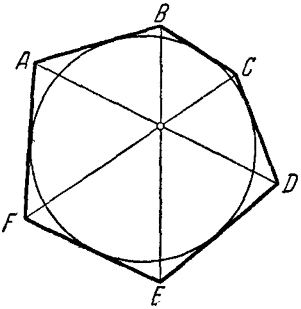
Примечание. Предельными случаями теоремы Паскаля являются некоторые предложения, относящиеся к вписанным в окружность пятиугольникам, четырехугольникам и треугольникам. Так, например, предположим, что вершина F шестиугольника двигается по окружности, стремясь к слиянию с точкой E. При этом сторона EF шестиугольника будет стремиться к касательной к окружности в точке E, и в пределе мы получаем следующее предложение: *точка пересечения стороны BC вписанного в окружность пятиугольника $ABCDE$ с касательной к окружности в точке E лежит на одной прямой с точками пересечения сторон AB и DE, CD и AE* (черт. 40, *а*). Аналогично, считая, что вершина F совпадает с E, а вершина D — с C, мы получим следующую теорему: *точка пересечения сторон AB и CE вписанного в окружность четырехугольника $ABCE$ лежит на одной прямой с точками пересечения стороны AE и касательной к окружности в точке E, стороны AE и касательной к окружности в точке C* (черт. 40, *б*). Предполагая, что вершина F шестиугольника совпала с E, а C — с B, мы получим, что *точка пересечения касательных к окружности в вершинах E и B вписанного в окружность четырехугольника $ABDE$ лежит на одной прямой с точками пересечения противоположных сторон четырехугольника*; очевидно, на этой же прямой лежит и точка пересечения касательных к окружности в точках A и D (черт. 40, *в*). Наконец, предполагая, что вершина B шестиугольника



Черт. 40.

слилась с A, вершина D — с C и вершина F — с E, мы получаем *точки пересечения сторон треугольника ACE с касательными к описанной вокруг ACE окружности в противоположных вершинах треугольника лежат на одной прямой* (черт. 40, *г*).

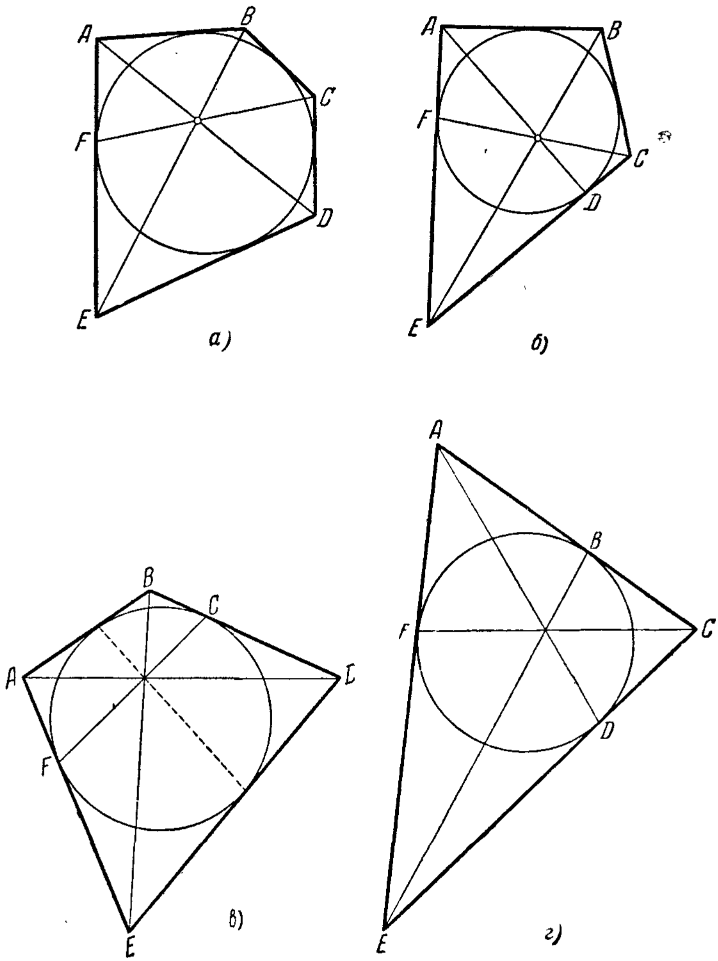
130*. Теорема Брианшона. Если шестиугольник $ABCDEF$ описан около окружности, то прямые, соединяющие его противоположные вершины (A и D, B и E, C и F), пересекаются в одной точке (черт. 41).



Черт. 41.

Примечание. Аналогично тому, как из теоремы Паскаля можно вывести ряд новых предложений, считая, что те или иные вершины вписанного шестиугольника совпадают между собой (см. примечание к предыдущей задаче), так и из теоремы Брианшона можно вывести новые теоремы, если считать отдельные стороны описанного шестиугольника совпадающими. Так, если сторона EF описанного шестиугольника изменяется, стремясь совпасть со стороной FA (точка касания этой стороны с окружностью стремится к совпадению с точкой касания с окружностью стороны FA), то в пределе мы получаем следующее предложение: *прямая, соединяющая вершину C описанного вокруг окружности пятиугольника $ABCDE$ с точкой F касания стороны AE с окружностью, проходит через точку пересечения диагоналей AD и BE* (черт. 42, *а*). Аналогично, если считать, что EF совпадает с FA, а DE — с CD, мы получим: *диагональ BE описанного вокруг окружности четырехугольника $ABCE$ проходит через точку пересечения прямых, соединяющих вершины A и C соответственно с точками касания с окружностью сторон CD и AE* (черт. 42, *б*). Считая, что сторона EF совпадает с FA, а CD — с BC, мы получим: *прямая, соединяющая точки касания противоположных сторон AE и BD описанного около окружности четырехугольника $ABDE$, проходит через точку пересечения диагоналей*; нетрудно видеть, что через эту же точку проходит и прямая, соединяющая точки касания с окружностью сторон AB и DE (черт. 42, *в*; сравните с задачей 105). Наконец, предполагая, что сторона EF шестиугольника совпала с FA, сторона CD — с DE и сторона AB — с BC, получим, что *прямые, соединяющие вершины треугольника ACE с точками касания вписанной в треугольник окружности с противоположными сторонами, пересекаются в одной точке* (черт. 42, *г*; см. ниже задачу 134 д)).

В последующих задачах принимается следующее условие о знаках отрезков. Два отрезка AB и CD, расположенные на одной пря-



Черт. 42.

мой, считаются имеющими одинаковые знаки, если направления этих отрезков (от A к B и от C к D) совпадают; в противном случае отрезки считаются имеющими различные знаки и отношение их длин берется со знаком минус.

Отметим еще, что выражение «на сторонах треугольника» в последующих задачах всюду надо понимать в смысле «на сторонах или их продолжениях» (т. е. точка A_1 здесь называется лежащей на стороне BC, если только она расположена на прямой BC).

131. Теорема Менелая. Пусть A_1, B_1 и C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Для того чтобы эти точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно[1]), чтобы имело место соотношение

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$

132. Вывести из теоремы Менелая

а) теорему о полном четырехстороннике (см. задачу 114);

б) теорему Дезарга (см. задачу 127);

в) теорему Паскаля (см. задачу 129).

133. Теорема Чевы. Пусть A_1, B_1 и C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Для того чтобы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались в одной точке или были все параллельны, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

134. Вывести из теоремы Чевы, что

а) медианы треугольника пересекаются в одной точке;

б) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;

в) высоты треугольника пересекаются в одной точке;

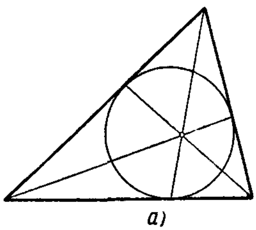
г) прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие его периметр пополам, пересекаются в одной точке;

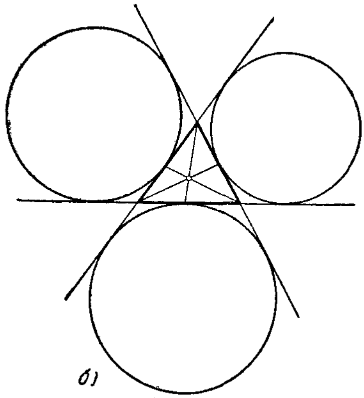
---

[1]) Слова «необходимо и достаточно» означают, что для полного решения задачи 131 надо доказать две теоремы: 1) теорему о том, что если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то выполняется указанное в задаче соотношение (необходимость приведенного условия), и 2) обратную теорему — теорему о том, что при выполнении этого соотношения точки A_1, B_1 и C_1 обязательно будут лежать на одной прямой (достаточность условия). Аналогичное примечание можно сделать и к условию задачи 133.

д) прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной в треугольник окружности с противоположными сторонами, пересекаются в одной точке (черт. 43, *а*);

е) прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями, пересекаются в одной точке (черт. 43, *б*).





Черт. 43.

135. а) Теорема Менелая для многоугольника. Пусть прямая l пересекает стороны A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 многоугольника $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (может быть, невыпуклого) соответственно в точках a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n. В таком случае

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2} \cdot \frac{A_2a_2}{a_2A_3} \cdots \frac{A_{n-1}a_{n-1}}{a_{n-1}A_n} \cdot \frac{A_na_n}{a_nA_1} = \pm 1,$$

где знак минус соответствует случаю нечетного n, а знак плюс — четного n.

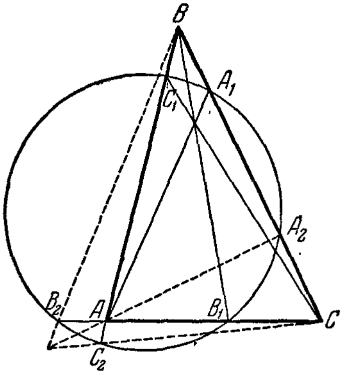
б) Теорема Чевы для многоугольника. В плоскости многоугольника (не обязательно выпуклого) с нечетным числом сторон $A_1A_2 \ldots A_{2n-1}$ дана точка O. Пусть прямые OA_1, OA_2, ..., OA_n, OA_{n+1}, ..., OA_{2n-1} пересекают противоположные вершинам A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, ..., A_{2n-1} стороны многоугольника соответственно в точках a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n-1}, a_1, ..., a_{n-1}. В таком случае

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2} \cdot \frac{A_2a_2}{a_2A_3} \cdots \frac{A_{2n-2}a_{2n-2}}{a_{2n-2}A_{2n-1}} \cdot \frac{A_{2n-1}a_{2n-1}}{a_{2n-1}A_1} = 1.$$

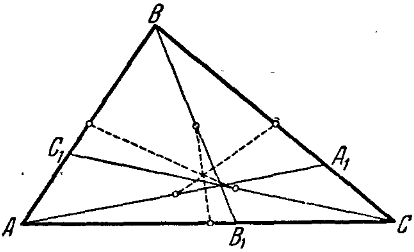
Примечание. Следует отметить, что условия теорем Менелая и Чевы для n-угольников при $n > 3$ уже недостаточны для того, чтобы соответствующие точки лежали на одной прямой или соответствующие прямые проходили через одну точку.

136. Пусть A_1, B_1 и C_1 — такие точки на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке; A_2, B_2 и C_2 — вторые точки пересечения окружности, проходящей через точки A_1, B_1 и C_1 со сторонами BC, CA и AB треугольника. Доказать, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке (черт. 44).

137. Пусть ABC — произвольный треугольник, AA_1, BB_1, CC_1 — произвольные прямые, проходящие через вершины треугольника и пересекающиеся в одной точке (A_1, B_1, C_1 — точки соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC). Доказать, что прямые, соединяющие середины сторон AB, BC и CA треугольника ABC соответственно с серединами отрезков CC_1, AA_1 и BB_1, пересекаются в одной точке (черт. 45).



Черт. 44.



Черт. 45.

138. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC; A_1', B_1' и C_1' — точки, симметричные первым трем точкам относительно середин соответствующих сторон треугольника. Доказать, что

а) если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то и точки A_1', B_1', C_1' лежат на одной прямой;

б) если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_1', BB_1', CC_1' пересекаются в одной точке.

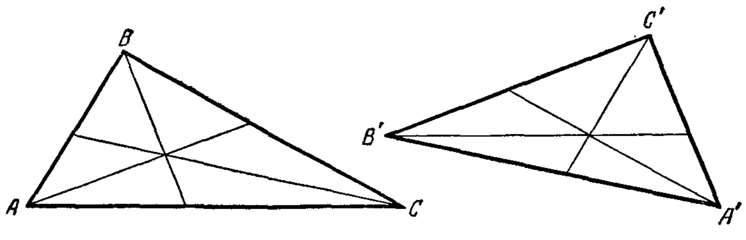
139. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — три прямые, проходящие через вершины треугольника ABC, AA_1', BB_1' и CC_1' — прямые, симметричные первым трем прямым относительно биссектрис соответствующих углов треугольника (точки A_1 и A_1' лежат на стороне BC треугольника ABC, точки B_1 и B_1' — на стороне AC, точки C_1 и C_1' — на стороне AB). Доказать, что

а) если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то и точки A_1', B_1' и C_1' лежат на одной прямой;

б) если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_1', BB_1' и CC_1' пересекаются в одной точке;

в) если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M, а прямые AA_1', BB_1' и CC_1' пересекаются в точке N, то проекции точек M и N на стороны треугольника лежат на одной окружности, центр которой находится в середине отрезка MN. В какой связи находится эта последняя теорема с предложением задачи 99?

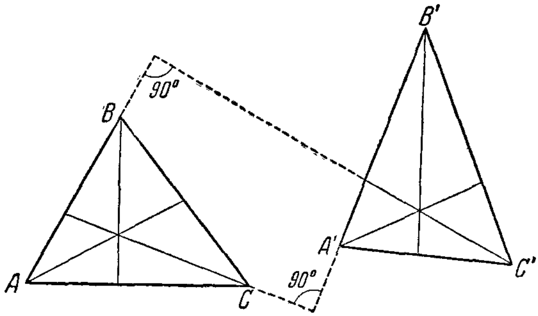
140*. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Доказать, что если прямые, проведенные через вершины A', B' и C'



Черт. 46а.

треугольника $A'B'C'$ параллельно сторонам BC, CA и AB треугольника ABC, пересекаются в одной точке, то и прямые, проведенные через вершины A, B и C треугольника ABC параллельно сторонам $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ треугольника $A'B'C'$, также пересекаются в одной точке (черт. 46а).

141*. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Доказать, что если прямые, проведенные через вершины треугольника $A'B'C'$ перпендикулярно к соответствующим сторонам



Черт. 46б.

треугольника ABC, пересекаются в одной точке, то и прямые, проведенные через вершины треугольника ABC перпендикулярно к соответствующим сторонам треугольника $A'B'C'$, пересекаются в одной точке (черт. 46б).

---

142. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится в точке A пополам.

143. а) Даны отрезок MN и прямая p. Найти на прямой p точку X, из которой отрезок MN виден под наибольшим углом.

б) Даны отрезок MN и окружность S. Найти на окружности S точки X и Y, из которых отрезок MN виден под наибольшим и под наименьшим углом.

144. Найти треугольник наименьшего возможного периметра, если известны:

а) две вершины A и B треугольника и прямая l, на которой лежит третья вершина;

б) вершина A и две прямые l и m, на которых лежат вершины B и C;

в) три прямые l, m, n, на которых лежат вершины A, B и C.

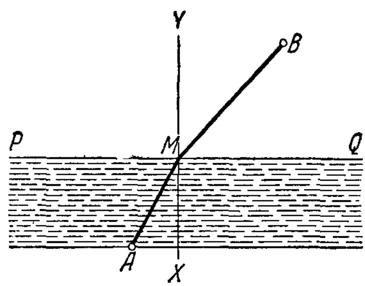
145. Найти в треугольнике точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника была бы наименьшей.

146. Найти в треугольнике точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника была бы наименьшей.

147. Найти в треугольнике точку, сумма квадратов расстояний от которой до сторон треугольника была бы наименьшей.

148. Даны две точки A и B и прямая PQ. Доказать, что сумма $b \cdot AM + a \cdot BM$, где a и b — данные положительные числа, имеет наименьшее значение для такой точки M прямой PQ, что

$$\frac{\cos \angle AMP}{\cos \angle BMQ} = \frac{a}{b}.$$



Черт. 47.

Примечание. Настоящая задача может иметь следующий смысл. Пусть требуется найти наиболее выгодный путь из некоторого пункта A, расположенного на берегу реки, до пункта B, находящегося где-то по другую сторону реки (черт. 47). Тогда если скорость движения на лодке равна a, а скорость движения человека на суше равна b, то задача сводится к тому, чтобы найти такую точку M на противоположном берегу реки, чтобы сумма

$$\frac{AM}{a} + \frac{BM}{b} = \frac{1}{ab}(b \cdot AM + a \cdot BM)$$

была возможно меньшей $\left(\text{здесь } \frac{AM}{a}\right.$ есть время, требующееся лодке, чтобы пройти путь AM; $\frac{BM}{b}$ — время, нужное для того, чтобы дойти по суше от точки M до пункта $B\Big)$. Теорема задачи 148 указывает, как найти такую точку.

Результат этой задачи имеет очень важное значение для физики. Предположим, что ломаная AMB представляет собой путь светового луча из точки A в точку B. Причиной излома пути в точке M мы будем считать то, что в этой точке луч переходит из одной среды в другую (например, из воздуха в воду); другими словами, мы будем считать, что точки A и B находятся по разные стороны от прямой PQ и что PQ есть линия раздела двух различных оптических сред. Пусть XY есть перпендикуляр к прямой PQ в точке M. Угол AMX называется углом падения луча AM, а угол BMY — углом преломления луча MB. Если считать, что a есть скорость света в первой среде, а b — скорость света во второй среде, то выражение $\frac{AM}{a}+\frac{MB}{b}$ будет представлять собой общее время, необходимое лучу света для того, чтобы пройти из точки A в точку B. Теорема задачи 148 утверждает, что это время будет кратчайшим в том случае, если

$$\frac{\cos\angle AMP}{\cos\angle BMQ}=\frac{\sin\angle AMX}{\sin\angle BMY}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}=\frac{a}{b};$$

т. е. если отношение синусов угла падения и угла отражения равно некоторой постоянной для данных сред величине (а именно, отношению скоростей света в этих средах). Но хорошо известно из опыта, что именно таков закон преломления света. Сопоставив этот результат с тем, что закон отражения света от гладкой поверхности (например, от зеркала) — угол падения равен углу отражения — тоже соответствует тому, что луч света идет по кратчайшему пути (см. решение задачи 77 а) настоящей книги), мы сможем заключить, что свет всегда избирает кратчайший (по времени) путь между двумя точками. Этот принцип, называемый принципом Ферма, с некоторыми уточнениями на самом деле оправдывается во всех случаях; он имеет также некоторые аналогии в механике (являющиеся основаниями весьма глубоких и важных для современной физики оптико-механических аналогий) и является одним из существенных принципов физики.

149*. Доказать, что из всех четырехугольников, имеющих данные длины сторон a, b, c и d, наибольшую площадь имеет тот, вокруг которого можно описать окружность.

150*. Доказать, что из всех четырехугольников, имеющих данные величины углов и данный периметр, наибольшую площадь имеет тот, в который можно вписать окружность.

Примечание. Формулировки задач 149 и 150 очень похожи друг на друга. Это сходство становится еще более явственным, если вспомнить, что все четырехугольники имеют одну и ту же сумму углов, а именно 360°, так что задачам 149 и 150 можно придать следующую форму:

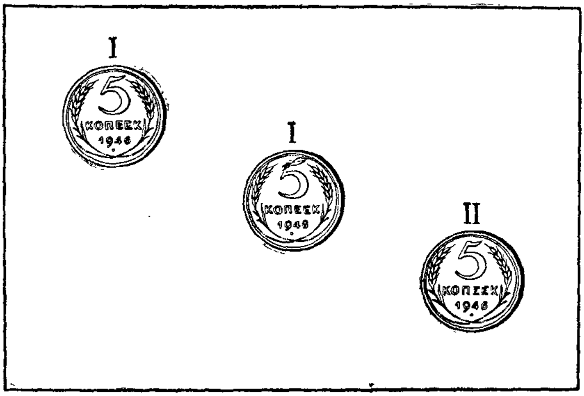
а) Из всех четырехугольников с данными сторонами (и данной суммой углов, равной 360°) наибольшую площадь имеет четырехугольник, который можно вписать в окружность.

б) Из всех четырехугольников с данными углами и данной суммой сторон наибольшую площадь имеет четырехугольник, в который можно вписать окружность.

Эта аналогия не является случайной, а имеет глубокие основания, объяснить которые в рамках настоящего задачника не представляется возможным.

РЕШЕНИЯ

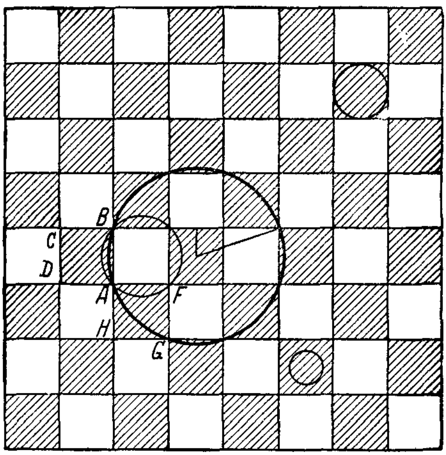
1. Начинающий игру должен положить монету на центр стола. В дальнейшем он кладет свою монету каждый раз симметрично (относительно центра стола) монете, положенной вторым играющим (черт. 48).



Черт. 48.

2. Легко видеть, что искомая окружность не может пересекать границу клетки где-нибудь между вершинами, ибо иначе она проходила бы по белой клетке. Предположим теперь, что эта окружность проходит по черной клетке $ABCD$ и пересекает границу этой клетки в точках A и B (черт. 49). Границу черной клетки $AFGH$ она может пересечь во второй раз либо в точке F, либо в точке G. Очевидно, что во втором случае окружность будет больше, чем в первом; следовательно, если искомая окружность проходит через точки A

и B, то она пройдет и через точку G. Если же предположить, что искомая окружность пересекает границу клетки $ABCD$ в точках A и C, то она может пересечь границу клетки $AFGH$ либо в F, либо в H (ибо точки A, C и G лежат на одной прямой). Но легко видеть, что обе эти окружности равны окружности, проходящей через точки A, B и G. Отсюда следует, что наибольшей будет изображенная на черт. 49 окружность с центром в центре черной клетки, проходящая по восьми черным клеткам; радиус этой окружности, очевидно, равен $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$, где за единицу принята сторона клетки.

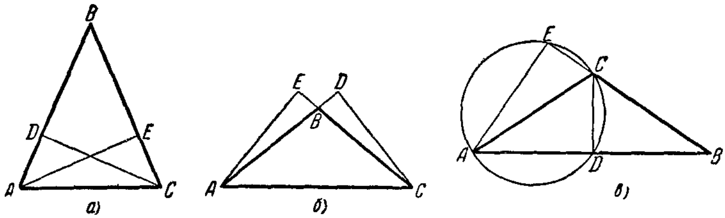


Черт. 49.

3. Легко видеть, что узел имеет форму выпуклого пятиугольника: он ограничен тремя сгибами и двумя кромками, к которым примыкают свободные концы ленты. Таким образом, нам необходимо доказать лишь, что все стороны и все углы этого многоугольника равны между собой.

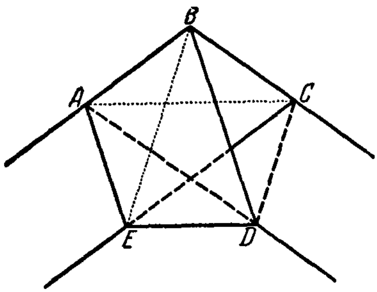
Докажем предварительно, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный; это обстоятельство понадобится нам в дальнейшем доказательстве.

Если обе равные высоты AE и CD треугольника ABC расположены внутри него (черт. 50, *а*) или вне его (черт. 50, *б*), то прямоугольные треугольники ACE и ACD равны, (общая гипотенуза и равные катеты), т. е. $\angle BAC = \angle BCA$, а значит, треугольник ABC в этом случае равнобедренный.



Черт. 50.

Рассмотрим теперь высоту CD, расположенную внутри тупоугольного треугольника, и высоту AE, расположенную вне этого треугольника (черт. 50, *в*). Точки D и E лежат на окружности, построенной на AC, как на диаметре. Так как прямые AB и BC непараллельны, то острые углы CAD и ACE не равны, а следовательно, и соответствующие хорды не равны: $CD \neq AE$. Таким образом, в этом случае равенство высот невозможно.



Черт. 51.

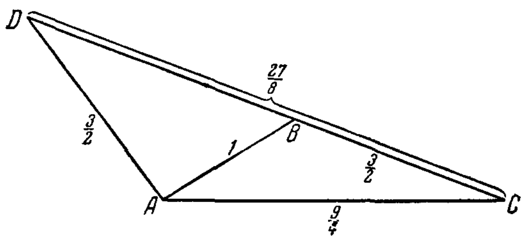
Перейдем теперь к решению поставленной задачи. Обозначим вершины пятиугольного узла через A, B, C, D и E (см. черт. 51). Воспользуемся тем, что края ленты параллельны. Рассмотрим, например, треугольник EAB. Высоты, опущенные на стороны EA и BA этого треугольника, равны, так как они равны ширине ленты. Отсюда по доказанному выше заключаем, что $EA = AB$. Точно так же заключаем, что $AB = BC$ и $AE = ED$. (Но нельзя утверждать, что треугольник EDC равнобедренный, так как мы не знаем, равна ли высота, опущенная на ED, ширине ленты или нет!)

Так как края ленты параллельны, то $AB \parallel EC$, $CD \parallel BE$, $EA \parallel DB$, $BC \parallel AD$. Поэтому четырехугольники $EABC$, $BCDE$, $DEAB$, $ABCD$ — трапеции, и притом по доказанному две первые — равнобочные трапеции. Отсюда следует, что $\angle B = \angle A$ и $\angle B = \angle C$.

Докажем, что все диагонали пятиугольника равны между собой. Рассмотрим, например, треугольник ADB. Высоты этого треугольника, опущенные на стороны AD и BD, равны между собой (они равны ширине ленты). Отсюда имеем $AD = BD$. Аналогично доказываем, что $AD = DB = BE = EC$ (но не AC!). Рассмотрим теперь треугольники EAB и ABC. Они имеют по две соответственно равные стороны и по равному углу между ними. Поэтому эти треугольники равны; отсюда $AC = EB$, а следовательно, $AC = CE = EB = BD = DA$. В трапеции $ABCE$ равны диагонали. Значит, она равнобочная (треугольники AED и ABE имеют общее основание, равные высоты, опущенные на основание, и равные боковые стороны; отсюда и из того, что AC не параллельно AE, следует, что треугольники равны). Отсюда

$$AB = ED, \quad \angle A = \angle E \quad \text{и} \quad \angle B = \angle ABD + \angle DBC = \\ = \angle EDB + \angle BDC = \angle D.$$

Таким образом, все стороны и все углы пятиугольника равны между собой, т. е. пятиугольник действительно правильный.



Черт. 52.

4. Могут. В качестве примера рассмотрим треугольники ABC и ACD (черт. 52), стороны которых соответственно равны 1, $^3/_2$, $^9/_4$ и $^3/_2$, $^9/_4$, $^{27}/_8$. Эти треугольники имеют равные углы (в силу пропорциональности сторон они подобны) и по две соответственно равные стороны.

Примечание. Вообще условию задачи удовлетворяют треугольники со сторонами, соответственно, a, aq, aq^2 и aq, aq^2, aq^3 (где $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, так как иначе наибольший из этих отрезков превышает сумму двух других).

5. Наибольшее число острых углов в выпуклом многоугольнике равно трем. Действительно, сумма всех внешних углов n-угольника всегда равна $4d$. Если бы какой-либо n-угольник ($n \geqslant 4$) имел четыре острых внутренних угла, то внешние углы, дополнительные к этим внутренним углам, были бы тупыми и их сумма была бы больше $4d$; поэтому сумма всех внешних углов и подавно была бы больше $4d$.

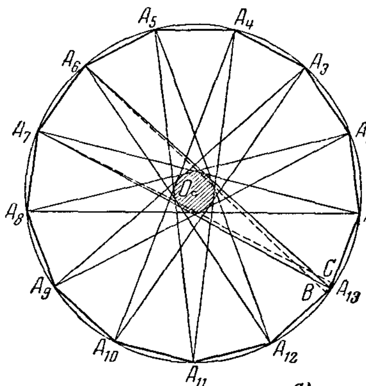
6. а) Легко видеть, что в образовании каждого из многоугольников разбиения может участвовать не более двух диагоналей, выходящих из одной вершины. Таким образом, через каждую вершину 13-угольника проходят не более чем две стороны многоугольника разбиения; при этом в произведении $13 \cdot 2$ каждая сторона многоугольника разбиения считается дважды, так как она проходит через две вершины 13-угольника. Следовательно, число сторон многоугольника разбиения не может быть больше

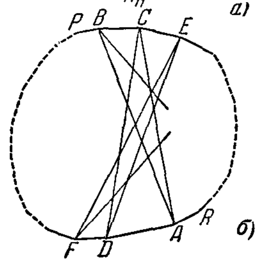
$$\frac{13 \cdot 2}{2} = 13.$$

Легко показать, что существуют 13-угольники, у которых некоторые из образованных указанным способом многоугольников разбиения имеют ровно 13 сторон. Возьмем правильный 13-угольник и проведем все его диагонали (черт. 53, *а*). Ясно, что ни одна из них не проходит через центр O описанной окружности. Многоугольник, внутри которого лежит центр O, должен иметь не менее 13 сторон, так как при повороте вокруг центра на $\frac{360^\circ}{13}$ он совмещается сам с собой (при таком повороте совмещается сам исходный многоугольник и, следовательно, все его диагонали).

Примечание. Нетрудно видеть, что если n — произвольное нечетное число, то наибольшее число сторон, которое может иметь многоугольник, полученный в результате разбиения выпуклого n-угольника на части всеми его диагоналями, равно n.

б) Выше для случая 13-угольника было показано, что никакой многоугольник разбиения не может иметь больше сторон, чем исходный n-угольник; это рассуждение сохраняет силу для любого n. Покажем теперь, что если исходный многоугольник имел 1950 сторон, то число сторон у многоугольника разбиения должно быть меньше 1950. Как и ранее, в образовании любого многоугольника разбиения может участвовать не более двух диагоналей исходного многоугольника, выходящих из одной вершины. Пусть теперь A есть некоторая вершина 1950-угольника, из которой исходят две диагонали AB и AC, участвующие в образовании многоугольника разбиения, имеющего наибольшее число сторон (черт. 53, *б*). Очевидно, что B и C — соседние вершины многоугольника, так как иначе из вершины A выходила бы диагональ, разбивающая наш многоугольник на две части. Рассматриваемый многоугольник разбиения заключен внутри угла BAC; по этому сторонами его могут служить только диагонали, соединяющие какую-либо из вершин ломаной $ADF \ldots PB$ с вершинами ломаной $CE \ldots RA$. Но общее число вершин обеих этих ломаных, не считая концов A, B и C, равно $1950 - 3 = 1947$. Поэтому хотя одна из этих ломаных имеет не больше чем 973 вершины; пусть это будет, например, ломаная $ADF \ldots PB$. В таком случае в образовании рассматриваемого многоугольника разбиения участвуют не больше чем $2 \cdot 973$ диагоналей, выходящих из вершин D, F, ..., P этой ломаной. Кроме того, двумя





Черт. 53.

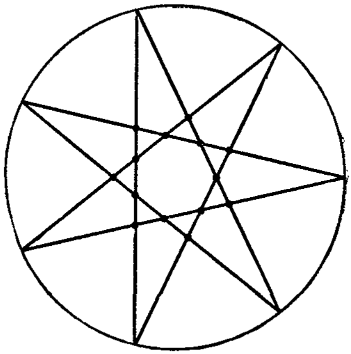
сторонами многоугольника разбиения служат диагонали AB и AC и кроме BA может быть еще одна сторона этого многоугольника, проходящая через вершину B 1950-угольника. Таким образом, число сторон многоугольника разбиения не может быть больше чем $2\cdot 973+3=1949$.

С другой стороны, нетрудно построить такой 1950-угольник, у которого найдется многоугольник разбиения, имеющий ровно 1949 сторон. Чтобы показать это, возьмем правильный 1949-угольник. У него имеется многоугольник разбиения с 1949-ю сторонами (сравните с решением пункта а) настоящей задачи). Срежем теперь одну из вершин исходного многоугольника так, чтобы полученная сторона нового 1950-угольника была очень короткой. Вершины полученного 1950-угольника будут близки к вершинам правильного 1949-угольника. Поэтому центральный правильный 1949-угольник разбиения хотя и превратится в неправильный, однако число его сторон не уменьшится (ср. с черт. 53, *а*, на котором пунктиром изображено построение 14-угольника, у которого существует многоугольник разбиения, имеющий 13 сторон).

Примечание. Нетрудно видеть, что если n — произвольное четное число, то наибольшее число сторон, которое может иметь многоугольник, полученный в результате разбиения выпуклого n-угольника на части всеми его диагоналями, равно $n-1$.

7. а) Рассмотрим какое-нибудь звено нашей 13-звенной ломаной. На этом звене может лежать не больше 10 точек самопересечения — ведь всего ломаная имеет 13 звеньев, а 3 из них (само рассматриваемое звено и два соседних с ним) заведомо не пересекают нашего звена. Отсюда следует, что общее число точек самопересечения не может превосходить $\frac{13\cdot 10}{2}=65$ (65 точек самопересечения будет в том случае, если каждое звено пересекает ровно 10 других звеньев; при этом в произведении $13\cdot 10$ каждая точка самопересечения считается дважды, так как в этой точке пересекаются два звена).

Нетрудно видеть, что 13-звенная ломаная может иметь 65 точек самопересечения. Для того чтобы получить такую ломаную, достаточно рассмотреть звездчатый правильный 13-угольник, который образуется, если точки, делящие окружность на 13 частей, соединять хордами, отсекающими $\frac{6}{13}$ частей окружности (см. черт. 54, где для большей ясности изображена не 13-звенная ломаная с 65 точками самопересечения, а 7-звенная ломаная, имеющая $\frac{7\cdot4}{2}=14$ точек самопересечения).

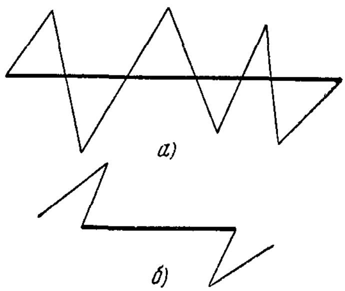


Черт. 54.

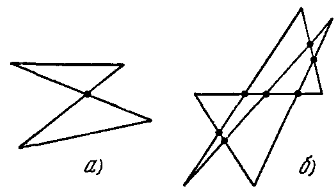
Примечание. Совершенно аналогично показывается, что наибольшее возможное число точек самопересечения замкнутой n-звенной ломаной, где n — какое угодно нечетное число, равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

б) Аналогично задаче 6 здесь является очень существенной четность или нечетность числа звеньев ломаной. В случае когда число звеньев n четно, попрежнему можно утверждать, что число точек самопересечения не превосходит $\frac{n(n-3)}{2}$ (см. решение задачи а), в частности, примечание к этому решению); однако в этом случае, как легко видеть, число точек самопересечения никогда не может быть равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Действительно, для того чтобы число точек самопересечения ломаной было равно $\frac{n(n-3)}{2}$, необходимо, чтобы каждое звено ломаной пересекалось со всеми $n-3$

звеньями, с ним не соседними. Но если звено замкнутой n-звенной ломаной, где n четно, пересекается с $n-3$ звеньями, то это значит, что два звена, соседние с данным, расположены по разные стороны от него (черт. 55, *а*). А если каждое звено ломаной обладает этим свойством, то два звена, расположенные через одно от данного, тоже не могут пересекать его (черт. 55, *б*).

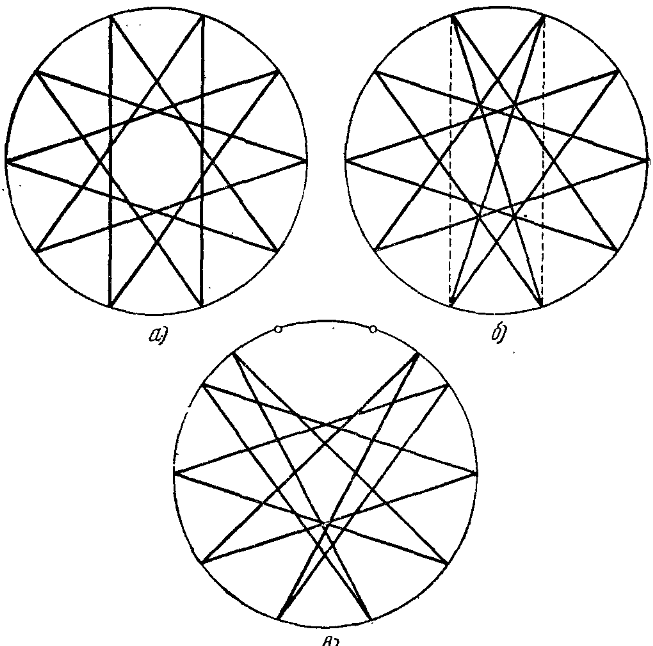


Черт. 55.



Черт. 56.

Нетрудно видеть, что наибольшее число точек самопересечения четырехзвенной ломаной равно 1 (черт. 56, *а*); наибольшее число точек самопересечения шестизвенной ломаной равно 7 (черт. 56, *б*). Нетрудно показать также, что *для каждого четного n существует n-звенная замкнутая ломаная, имеющая* $\frac{n(n-4)}{2}+1$ *точек самопересечения.* Для того чтобы построить такую ломаную, разделим окружность на n равных частей и соединим точки деления хордами, отсекающими $\frac{n}{2}-1$ частей окружности (аналогично тому, как мы поступали в случае нечетного n). Мы получим ломаную, имеющую $\frac{n(n-4)}{2}$ точек самопересечения (каждое звено пересекается с $n-4$ другими звеньями); при этом, если n не делится на 4, то эта ломаная распадается на две не связанные между собой части (на черт. 57, *а* изображен именно такой случай, отвечающий значению $n=10$). Отбросим в нашей ломаной две параллельные хорды и заменим их диаметрами, соединяющими попарно те же четыре точки; при этом, если даже первоначальная ломаная распадалась на две части, новая ломаная не будет распадаться (см. черт. 56, *б*). При этом появится новая точка самопересечения — центр окружности. Однако если новые звенья ломаной пройдут через точки пересечения старых звеньев (черт. 57, *б*), то несколько точек самопересечения ломаной сольются в одну, и общее количество



Черт. 57.

точек самопересечения уменьшится. Сдвинув теперь один конец каждого из новых звеньев по окружности на малое расстояние, мы получим ломаную, никакие три звена которой не проходят через одну точку (черт. 57, *в*). Число точек самопересечения этой ломаной будет равно $\frac{n(n-4)}{2}+1$.

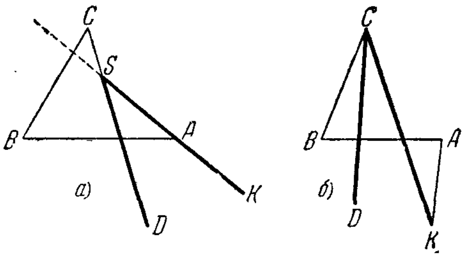
В частности, существует 1950-звенная замкнутая ломаная, имеющая $\frac{1950\cdot 1946}{2}+1=1\,897\,351$ точку самопересечения.

Покажем теперь, что *n-звенная ломаная, где n четно, не может иметь больше чем $\frac{n(n-4)}{2}+1$ точек самопересечения.* Доказательство проведем методом математической индукции. Прежде всего совершенно очевидно, что замкнутая четырехзвенная ломаная не может иметь больше одной точки пересечения. Теперь предположим, что мы уже показали, что n-звенная ломаная (n-четно) не может иметь больше $\frac{n(n-4)}{2}+1$ точек самопересечения; покажем, что в таком случае никакая $(n+2)$-звенная ломаная не может иметь больше $\frac{(n+2)(n-2)}{2}+1$ точек самопересечения.

Предположим, что это не так, т. е. что некоторая $(n+2)$-звенная ломаная имеет больше $\frac{n^2-4}{2}+1$ точек самопересечения. Пару соседних звеньев ломаной назовем «углом». Нетрудно видеть, что рассматриваемая ломаная должна иметь хоть один «угол», имеющий $2n-3$ или больше точек самопересечения; действительно, если бы каждый «угол» ломаной содержал не больше $2n-4$ точек самопересечения, то общее число таких точек не превосходило бы $\frac{(n+2)(2n-4)}{4}=$ $=\frac{n^2-4}{2}$ (в произведении $(n+2)\cdot(2n-4)$, где $n+2$ — число «углов», каждая точка самопересечения считается четыре раза, так как она принадлежит двум звеньям, а следовательно, четырем «углам»). Пусть AB и BC — звенья ломаной, образующие такой «угол»; CD и KA — звенья, соседние с этим «углом». Но так как $n+2$ четно, то звено ломаной может иметь $(n+2)-3=n-1$ точку самопересечения только в том случае, если соседние с ним звенья расположены по разные стороны от этого звена (см. выше черт. 55, *а*); при этом два соседних с данным звена должны располагаться каждый по одну сторону от своих соседних. Больше чем $n-1$ точек самопересечения никакое звено $(n+2)$-звенной ломаной иметь не может. Таким образом мы заключаем, что одно из двух звеньев AB и BC (пусть для определенности это будет звено AB) должно содержать $n-1$ точку самопересечения ломаной, а второе звено содержит $n-2$ таких точки, причем звенья KA, AB, BC и CD должны быть расположены так, как изображено на черт. 58; при этом все звенья ломаной, кроме KA и CD, должны пересекать и AB и BC. Далее рассмотрим два случая, которые изображены на черт. 58, *а* и *б*.

1°. Прямая KA пересекает отрезок BC (черт. 58, *а*). В этом случае KA пересекает отрезок CD в некоторой точке S.

Заменим нашу ломаную новой, отбросив звенья AB и BC, сократив звено CD до SD и продолжив звено KA до KS. Так как все звенья ломаной, кроме KA и CD, пересекают AB и BC, то каждое из этих звеньев, которое пересекает



Черт. 58.

отрезок CS, пересекает также и отрезок SA. Поэтому число точек самопересечения нашей новой ломаной меньше числа точек самопересечения первоначальной ломаной ровно на $2n—3$ — на число точек самопересечения, принадлежащих «углу» ABC. А так как первая ломаная имела не меньше $\frac{n^2-4}{2}+2$ точек самопересечения, то новая ломаная имеет не меньше чем $\frac{n^2-4}{2}+2-(2n-3)=\frac{n(n-4)}{2}+3$ таких точек. Но это невозможно, ибо, по предположению, n-звенная ломаная не может иметь больше $\frac{n(n-4)}{2}+1$ точек самопересечения.

2°. Прямая KA не пересекает отрезка BC (черт. 58, *б*). В этом случае четырехугольник $KACB$ является выпуклым; поэтому каждый отрезок, который пересекает его стороны KA и BC, пересекает также его диагональ KC. В частности, каждое звено ломаной, кроме CD, которое пересекает звено KA, пересекает также и отрезок CK (ибо каждое звено ломаной, кроме CD, BA и AK, пересекает BC). Заменим теперь нашу ломаную новой, откинув звенья AB, BC и AK и прибавив новое звено CK. Число точек самопересечения новой ломаной меньше числа точек самопересечения старой ломаной на $2n-3$ точек, принадлежащих «углу» ABC, и еще, может быть, на одну точку пересечения CD и AK (если таковая имелась). Поэтому число ее точек самопересечения не меньше чем

$$\frac{n^2-4}{2}+2-(2n-3)-1=\frac{n(n-4)}{2}+2,$$

что также невозможно.

Полученное противоречие и показывает, что $(n+2)$-звенная ломаная, имеющая больше чем $\frac{n^2-4}{2}+1$ точек самопересечения, не может существовать.

Отсюда в силу принципа индукции следует, что наибольшее возможное число точек самопересечения n-звенной замкнутой ломаной, где n четно, равно $\frac{n(n-4)}{2}+1$. В частности, 1950-звенная ломаная не может иметь больше 1 897 351 точки самопересечения.

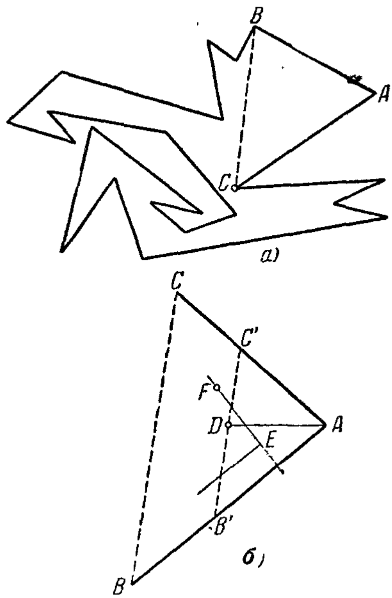
8. а) Докажем прежде всего, что у каждого многоугольника можно найти диагональ, которая разбивает его на два многоугольника с меньшим числом сторон. Рассмотрим самую правую (или одну из самых правых) вершину A многоугольника[1] (черт. 59, *а*). Обе примыкающие к ней вершины B и C лежат не правее ее. Проведем диагональ BC. Если внутри треугольника ABC нет других вершин многоугольника (как изображено на черт. 59, *а*), то диагональ BC уже разбивает наш n-угольник на треугольник ABC и $(n-1)$-угольник.

Предположим теперь, что внутри треугольника ABC имеются другие вершины многоугольника. Пусть D (черт. 59, *б*) — та из них, которая наиболее удалена от стороны BC (или одна из таких вершин, если их несколько). Мы утверждаем, что диагональ AD не пересекается ни одной из сторон многоугольника.

---

[1] Термин «самая правая» имеет здесь тот смысл, что через A можно провести прямую («вертикаль»), не пересекающую многоугольник.

Действительно, пусть какая-нибудь сторона EF пересекает AD. В силу нашего выбора точки D вершины E и F многоугольника обязательно лежат **вне** треугольника $AB'C'$, отсекаемого от треугольника ABC прямой, параллельной BC и проходящей через точку D. Следовательно отрезок EF должен пересекать две стороны треугольника $AB'C'$. Но ни сторону AB', ни сторону AC' он пересекать не может, так как в противном случае стороны многоугольника пересекали бы друг друга. Этим доказано, что никакая сторона многоугольника не пересекает диагонали AD, т. е. что AD делит многоугольник на два меньших многоугольника.



Черт. 59.

Если один из двух многоугольников разбиения имеет k сторон, то второй будет иметь $n-k+2$ сторон: действительно, сторонами первого из многоугольников будут $k-1$ сторон исходного многоугольника (k-й стороной будет диагональ исходного многоугольника), а следовательно, сторонами второго многоугольника будут являться оставшиеся $n-(k-1)=n-k+1$ сторон многоугольника и диагональ. Так как $k<n$ и $k>2$, то отсюда следует, что каждый из многоугольников, на которые диагональ AD делит исходный n-угольник, имеет меньше сторон, чем n. Разбивая далее таким же образом оба меньших многоугольника их диагоналями, мы в конце концов придем к разбиению исходного n-угольника на треугольники.

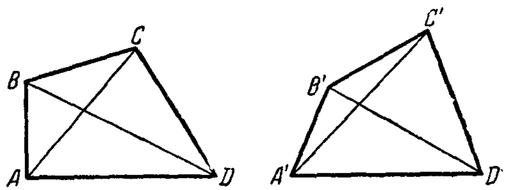
б) Докажем, что число треугольников, на которые разбивается n-угольник согласно задаче а), равно $n-2$. Действительно, пусть для разбиения n-угольника на треугольники нужно сделать x шагов. В результате получим $x+1$ треугольников (так как при каждом шаге один многоугольник делится на два, т. е. общее число многоугольников возрастает на единицу). Общее число сторон этих треугольников равно $n+2x$ (n сторон многоугольника и x проведенных диагоналей, являющихся каждая стороной двух треугольников). Таким образом, мы имеем уравнение

$$3(x+1)=n+2x,$$

откуда получаем $x+1=n-2$. Итак, непересекающиеся диагонали разбивают многоугольник на $n-2$ треугольника.

Все углы этих треугольников являются частями внутренних углов многоугольника. Поэтому сумма углов всех треугольников равна сумме углов многоугольника и, следовательно, искомая сумма равна $(n-2)2d$.

9. а) У треугольников BAD и $B'A'D'$ (черт. 60) $BA=B'A'$, $AD=A'D'$ и $\angle A>\angle A'$; отсюда по известной теореме о треугольниках с двумя соответственно равными сторонами имеем $BD>B'D'$. Теперь рассмотрим треугольники BCD и $B'C'D'$. В этих треугольниках $BC=B'C'$, $CD=C'D'$ и $BD>B'D'$; следовательно, $\angle C>\angle C'$.



Черт. 60.

Рассмотрим теперь две пары треугольников, имеющих по две соответственно равные стороны: $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$, $\triangle ADC$ и $\triangle A'D'C'$. Если бы было $AC>A'C'$, то по теореме о треугольниках с двумя соответственно равными сторонами мы имели бы $\angle B>\angle B'$, $\angle D>\angle D'$; но это невозможно, так как все углы четырехугольника $ABCD$ не могут быть больше соответствующих углов четырехугольника $A'B'C'D'$ (оба четырехугольника имеют одинаковую сумму углов, равную 360°). Если бы было $AC=A'C'$, то сумма углов четырехугольника $ABCD$ также оказалась бы больше суммы углов четырехугольника $A'B'C'D'$ (в этом случае $\angle B=\angle B'$, $\angle D=\angle D'$). Таким образом, $AC<A'C'$ и, следовательно, $\angle B<\angle B'$, $\angle D<\angle D'$.

б) Так как многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $A'_1A'_2 \dots A'_n$, по предположению, не равны, то хотя бы одна из разностей $\angle A_1-\angle A'_1$, $\angle A_2-\angle A'_2, \dots$ отлична от нуля. Предположим для определенности, что $\angle A_1-\angle A'_1\neq 0$. Очевидно, после нечетного числа перемен знаков (одной, трех и т. д.) мы придем к разности нашего ряда, имеющей иной знак, чем разность $\angle A_1-\angle A'_1$; после четного числа перемен знаков (двух, четырех и т. д.) мы придем к разности, имеющей тот же знак, что и $\angle A_1-\angle A'_1$. Но так как ряд $\angle A_1-\angle A'_1$, $\angle A_2-\angle A'_2, \dots, \angle A_n-\angle A'_n$, $\angle A_1-\angle A'_1$ начинается и кончается одной и той же разностью $\angle A_1-\angle A'_1$, то общее число перемен знаков в этом ряду должно быть четным.

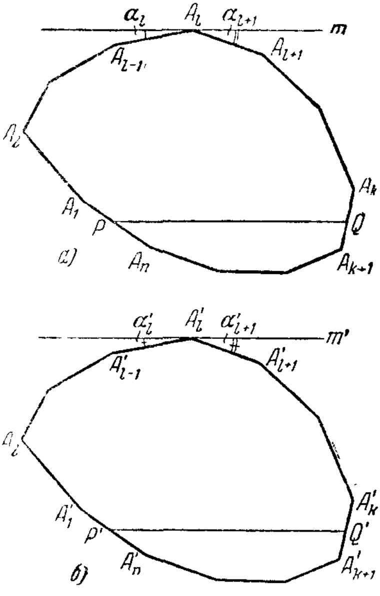
Заметим теперь, что так как оба многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ и $A'_1A'_2 \dots A'_n$ не равны и имеют одну и ту же сумму углов (а именно $2d(n-2)$), то невозможно, чтобы все углы первого многоугольника были не меньше (или не больше) соответствующих углов второго многоугольника. Таким образом в нашем ряду разностей обязательно должны быть перемены знаков; по доказанному выше этих перемен знаков будет не меньше двух. Остается доказать, что число перемен знаков не может быть точно два; отсюда будет следовать, что их не меньше четырех. Предположим противное, а именно, что в ряду разностей $\angle A_1-\angle A'_1$, $\angle A_2-\angle A'_2, \dots, \angle A_n-\angle A'_n$, $\angle A_1-\angle A'_1$ имеется точно две перемены знаков, например

$$\angle A_1-\angle A'_1>0, \angle A_2-\angle A'_2\geqslant 0, \dots, \angle A_k-\angle A'_k\geqslant 0;$$
$$\angle A_{k+1}-\angle A'_{k+1}<0, \dots, \angle A_n-\angle A'_n\leqslant 0.$$

Пусть P и Q — какие-либо точки сторон A_nA_1 и A_kA_{k+1} многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$; P' и Q' — соответствующие точки сторон $A'_nA'_1$ и $A'_kA'_{k+1}$ многоугольника $A'_1A'_2 \dots A'_n$ (т. е. такие, что $A'_nP'=A_nP$, $A'_kQ'=A_kQ$). Рассмотрим ломаные

$PA_1A_2 \ldots A_kQ$ и $P'A'_1A'_2 \ldots A'_kQ'$ (черт. 61, *а*, *б*). Все углы первой из этих ломаных не меньше соответствующих углов второй ломаной (причем угол A_1 больше угла A'_1). Мы утверждаем, что отсюда следует неравенство $PQ > P'Q'$.

Так как многоугольник $P'A'_1A'_2 \ldots A'_kQ'$ выпуклый, то он целиком лежит по одну сторону от прямой $P'Q'$. Среди всех прямых, проведенных через вершины ломаной $P'A'_1 \ldots Q'$ параллельно $P'Q'$, очевидно, найдется прямая m' такая, что многоугольник $P'A'_1A'_2 \ldots A'_kQ'$ целиком лежит в полосе между этой прямой и прямой $P'Q'$ (эта прямая может проходить сразу через две вершины ломаной $P'A'_1A'_2 \ldots A'_kQ'$, т. е. содержать целиком одну из ее сторон). Пусть A'_l — вершина (или одна из двух вершин), через которую проходит прямая m' (черт. 61, *б*).



Черт. 61.

Введем теперь з н а к и отрезков прямой m'. А именно, отрезок $M'N'$ этой прямой будем считать положительным, если направление от M' к N' совпадает с направлением от P' к Q', и отрицательным в противном случае (при этом отрезки $M'N'$ и $N'M'$ будут иметь разные знаки). Очевидно, что проекция отрезка $P'Q'$ на прямую m' (равная $P'Q'$) равна сумме проекций отрезков $P'A'_1$, $A'_1A'_2$, ..., $A'_{k-1}A'_k$, A'_kQ', взятых с соответствующими знаками (так на черт. 61, *б* проекции отрезков $P'A'_1$, $A'_1A'_2$ и A'_kQ' отрицательны, а проекции остальных отрезков положительны). Заметим, что величина проекции отрезка (взятая с соответствующим знаком) равна длине отрезка, умноженной на косинус угла между направлением отрезка и «положительным» направлением прямой m' (этот угол может быть как острым, так и тупым).

Пусть сторона $A'_{l-1}A'_l$ ломаной образует с прямой m' угол α'_l (черт. 61, *б*), а сторона $A'_lA'_{l+1}$ — угол α'_{l+1} ($\alpha'_l + \alpha'_{l+1} + \angle A'_l = 180^\circ$); возможно, что $\alpha'_l = 0$ или $\alpha'_{l+1} = 0$. Проведем через вершину A_l прямую m, которая образовала бы со стороной $A_{l-1}A_l$ угол α_l, а со стороной A_lA_{l+1} угол α_{l+1} (см. черт. 61, *а*), причем так, чтобы

$$\alpha_l \leqslant \alpha'_l, \quad \alpha_{l+1} \leqslant \alpha'_{l+1}$$

(это возможно, так как $\angle A_l = 180^\circ - (\alpha_l + \alpha_{l+1}) \geqslant 180^\circ - (\alpha'_l + \alpha'_{l+1}) = \angle A'_l$).

Обозначим далее углы, которые образуют стороны $A_{l-2}A_{l-1}$ и $A_{l+1}A_{l+2}$ с прямой m, а также $A'_{l-2}A'_{l-1}$ и $A'_{l+1}A'_{l+2}$ с прямой m' соответственно через α_{l-1} и α_{l+2}, α'_{l-1} и α'_{l+2}. Так как внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных, то

$$\alpha_{l-1} = \alpha_l + (180^\circ - \angle A_{l-1}); \quad \alpha'_{l-1} = \alpha'_l + (180^\circ - \angle A'_{l-1}).$$

Но так как $\alpha_l \leqslant \alpha'_l$; $\angle A_{l-1} \geqslant \angle A'_{l-1}$, то $\alpha_{l-1} \leqslant \alpha'_{l-1}$. Аналогично

$$\alpha_{l+2} = \alpha_{l+1} + (180^\circ - \angle A_{l+1}); \quad \alpha'_{l+2} = \alpha'_{l+1} + (180^\circ - \angle A'_{l+1}),$$

откуда, так как $\alpha_{l+1} \leqslant \alpha'_{l+1}$, $\angle A_{l+1} \geqslant \angle A'_{l+1}$, следует

$$\alpha_{l+2} \leqslant \alpha'_{l+2}.$$

Обозначим теперь углы, которые образуют стороны PA_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k$, A_kQ с прямой m и стороны $P'A'_1$, $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3, \ldots, A'_{k-1}A'_k$, A'_kQ' с прямой m', соответственно через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ и $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_k, \alpha'_{k+1}$. Переходя от пары углов α_{l-1} α'_{l-1} к паре α_{l-2}, α'_{l-2}, затем к паре α_{l-3}, α'_{l-3} и т. д. и от пары α_{l+1}, α'_{l+1} к паре α_{l+2}, α'_{l+2}, затем к паре α_{l+3}, α'_{l+3} и т. д., аналогично доказанному выше покажем, что

$$\alpha_1 < \alpha'_1, \quad \alpha_2 \leqslant \alpha'_2, \alpha_3 \leqslant \alpha'_3, \ldots, \quad \alpha_k \leqslant \alpha'_k, \quad \alpha_{k+1} \leqslant \alpha'_{k+1}$$

(в первом случае у нас стоит строгое неравенство, так как известно, что $\angle A'_1 < \angle A_1$). Отсюда следует, что

$$\cos\alpha_1 > \cos\alpha'_1, \quad \cos\alpha_2 \geqslant \cos\alpha'_2, \ldots, \cos\alpha_{k+1} \geqslant \cos\alpha'_{k+1}.$$

Обозначим еще длины сторон $PA_1 = P'A'_1$, $A_1A_2 = A'_1A'_2$, $A_2A_3 = A'_2A'_3, \ldots, A_{k-1}A_k = A'_{k-1}A'_k$, $A_kQ = A'_kQ'$ ломаных соответственно через $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}$ и угол между PQ и m — через β. Воспользовавшись тем, что длина $P'Q'$ и длина проекции PQ на прямую m равны сумме длин проекций звеньев ломаной $P'A'_1A'_2 \ldots A'_kQ'$ на m', соответственно сумме длин проекций $PA_1A_2 \ldots A_kQ$ на m, получим

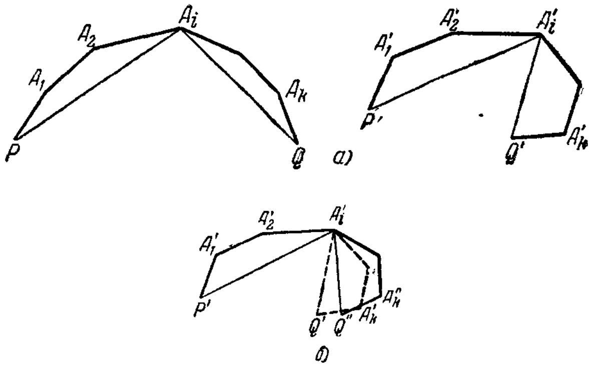
$$PQ \geqslant PQ\cos\beta = a_1 \cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + \ldots + a_{k+1}\cos\alpha_k >$$
$$> a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + \ldots + a_{k+1}\cos\alpha_{k+1} = P'Q',$$

что нам и требовалось доказать.

Теперь мы находимся уже у самого конца решения задачи. Аналогично проведенному рассуждению можно из рассмотрения ломаных $QA_{k+1}A_{k+2} \ldots A_nP$ и $Q'A'_{k+1}A'_{k+2} \ldots A'_nP'$ доказать, что $P'Q' > PQ$ (напоминаем, что, по предположению, $\angle A'_{k+1} > \angle A_{k+1}$, $\angle A'_{k+2} \geqslant A_{k+2}, \ldots, \angle A'_n \geqslant \angle A_n$). Полученное противоречие и доказывает теорему.

Примечание. Решение задачи 9 б) основывается на следующем вспомогательном предложении: если даны две выпуклые ломаные $PA_1A_2 \ldots A_kQ$ и $P'A'_1A'_2 \ldots A'_kQ'$, соответствующие звенья которых равны и все углы первой ломаной не меньше соответствующих углов второй ломаной (причем по крайней мере один из углов первой ломаной больше соответствующего угла второй), то $PQ > P'Q'$. Это предложение, очевидно, является обобщением известной теоремы о треугольниках с двумя соответственно равными сторонами (на которой основывается решение задачи 9 а).

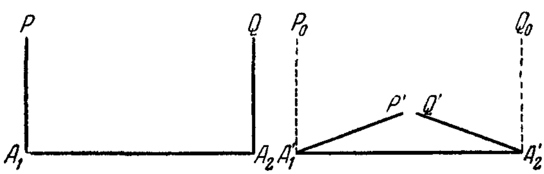
Наиболее естественным доказательством сформулированного выше предложения представляется следующее. Пусть A_i и A'_i — два не равных между собой соответствующих угла рассматриваемых ломаных, $\angle A_i > \angle A'_i$. Соединим A'_i с P' и Q' (черт. 62, *а*). Будем теперь увеличивать угол A'_i не меняя многоугольников $P'A'_1A'_2 \ldots A'_i$ и $A'_iA'_{i+1} \ldots A'_k\ Q'$, так, чтобы у полученной ломаной угол A'_i стал равен углу A_i первой ломаной (черт. 62, *б*). При этом в силу упомянутой выше теоремы о треугольниках отрезок $P'Q'$ только увеличится. Далее таким же образом будем увеличивать последовательно все



Черт. 62.

остальные углы ломаной $P'A_1'A_2' \ldots A_k'Q'$, отличные от соответствующих углов ломаной $PA_1A_2 \ldots A_kQ$, пока они не сравняются с углами ломаной $PA_1A_2 \ldots A_kQ$. Таким образом, мы в конце концов переведем ломаную $P'A_1'A_2' \ldots A_k'Q'$ в ломаную $PA_1A_2 \ldots A_kQ$. Так как у нас при этом отрезок $P'Q'$ будет все время только увеличиваться, то, следовательно, $PQ > P'Q'$.

Однако это доказательство имеет один существенный дефект. Дело в том, что в процессе последовательного увеличения углов



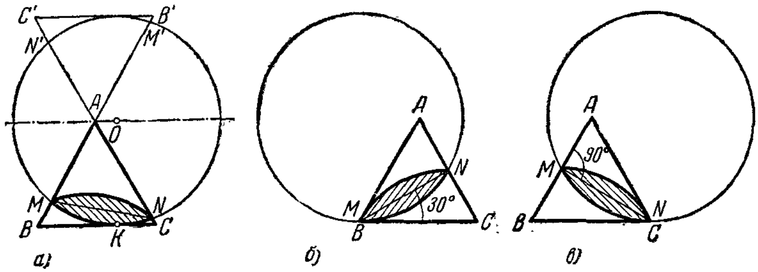
Черт. 63.

ломаной $P'A_1'A_2' \ldots A_k'Q'$ мы можем в известный момент превратить ломаную в невыпуклую, к которой наши рассуждения будут неприменимы. Так, например, на черт. 63 изображены две трехзвенные ломаные PA_1A_2Q и $P'A_1'A_2'Q'$; $P'A_1' = PA_1$, $A_1'A_2' = A_1A_2$, $A_2'Q' = A_2Q$, $\angle A_1' < \angle A_1$, $\angle A_2' < \angle A_2$. Если мы увеличим угол A_1' ломаной

$P'A_1'A_2'Q'$, сделав его равным углу A_1 ломаной PA_1A_2Q, то мы придем к невыпуклой ломаной $P_0A_1'A_2'Q'$; точно так же, увеличив угол A_2' до величины угла A_2, мы получим невыпуклую ломаную $P'A_1'A_2'Q_0$. Таким образом, в этом случае намеченное выше доказательство оказывается несостоятельным.

Можно уточнить приведенное доказательство, устранив сделанное возражение (см., например, Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 2, М. — Л., Учпедгиз, 1951, стр. 286—292 или Л. А. Люстерник, Выпуклые тела, Гостехиздат, 1941, стр. 44—51). Однако полученное на таком пути решение задачи 9 б) значительно сложнее приведенного в настоящей книге.

Французский математик О. Коши, которому принадлежит теорема задачи 9 б), не заметил, что приведенное в настоящем примечании доказательство является дефектным. Ошибка Коши была исправлена много позже другими математиками.



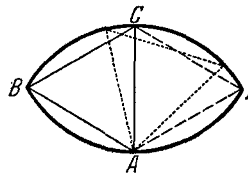
Черт. 64.

10. Пусть ABC — данный равносторонний треугольник, $AB'C'$ — треугольник, симметричный с ним относительно точки A (черт. 64, a). По стороне BC треугольника катится окружность; O — ее центр в некотором положении, K — точка касания стороны BC с окружностью. Стороны AB и AC высекают на окружности дугу MN. Проведем прямую OA. Она является осью симметрии фигуры. Следовательно, AB' и AC' высекают на окружности дугу $M'N'$, равную дуге MN. Так как угол A, содержащий $60°$, измеряется полусуммой дуг MN и $M'N'$, то каждая из этих дуг содержит по $60°$.

Далее, угол между хордой MN и касательной к окружности в точке M или N равен $30°$. Значит, чтобы показать, что заштрихованная на чертеже линза остается все время внутри треугольника ABC, достаточно показать, что углы

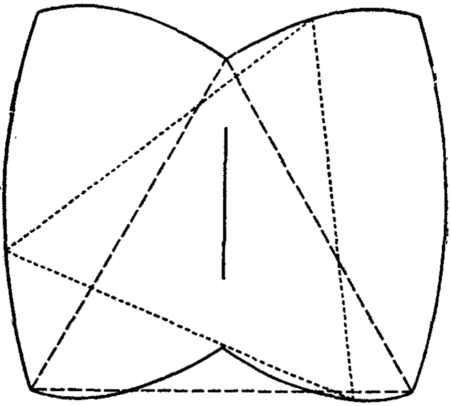
AMN и ANM остаются все время не меньше 30°. Но, как легко видеть, при движении окружности эти углы изменяются от 30 до 90° (черт. 64, *б* и 64, *в*). Отсюда следует, что линза не может выйти за пределы треугольника ABC.

11. Самая простая кривая, отличная от окружности, которая обладает требуемым свойством, изображена на черт. 65. Она состоит из двух равных дуг окружности, содержащих по 120°; радиус дуг равен стороне треугольника. Треугольник ABC, изображенный на черт. 65, может вращаться вокруг вершины A, так что вершины B и C его скользят по кривой. Когда вершина B займет положение C, а вершина C — положение D,



Черт. 65.

треугольник ABC можно начать вращать вокруг вершины B (совпавшей с точкой C), пока он снова не примет первоначальное положение (только теперь вершина A займет положение B, вершина B — положение C и вершина C — положение A). Затем его снова можно поворачивать вокруг вершины, совпавшей с точкой A, и т. д.



Черт. 66.

Примечание. Можно указать общий метод, при помощи которого можно построить сколь угодно много кривых, обладающих требуемым свойством. Будем равномерно поворачивать равносторонний треугольник ABC вокруг его центра O и одновременно как-то двигать центр O. Если движение центра — периодическое и за то время, в течение которого треугольник поворачивается на 120°, центр приходит в прежнее положение, то все вершины треугольника опишут одну кривую. Нетрудно добиться, чтобы эта кривая была несамопересекающейся и, следовательно, удовлетворяла всем условиям задачи. Так, например, на черт. 66 изображена кривая, которую описывают вершины равностороннего треугольника, вращающегося вокруг центра, в то время как центр равномерно двигается вверх и вниз по отрезку прямой (треугольник поворачивается на 60° за то время, в течение какого центр проходит рассматриваемый отрезок в одном направлении). Если центр равномерно двигается по кривой, подобной изображенной на черт. 65, но составленной из дуг окружностей, радиус которых равен $\frac{2}{3}$ высоты треугольника, причем центр описывает всю кривую за то время, в течение которого треугольник поворачивается на 120°, то вершины треугольника опишут кривую черт. 65.

12. Треугольник имеет три точки касания со вписанной окружностью, а квадрат — четыре. Поэтому хотя бы между одной парой точек касания окружности с треугольником лежат две точки касания окружности с квадратом. Следовательно, хотя бы один «угол» квадрата[1]) лежит весь внутри треугольника. Рассмотрим теперь отдельно два возможных случая.

1° Пусть внутри треугольника лежат два угла квадрата (черт. 67, *а*). В этом случае решение задачи очевидно — внутри квадрата лежит более $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ периметра треугольника.

2° Пусть только один угол квадрата лежит внутри треугольника (черт. 67, *б*). Тогда остальные три «угла» частично лежат вне треугольника. Покажем, однако, что при этом более трети каждого «угла» лежит внутри треугольника. Очевидно, $DM=DN$; $\triangle DKL$ — прямоугольный;

$$KL=KP+PL=KN+LM$$

(см. черт. 67, *б*). В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого из катетов, следовательно,

$$DK<KN+LM, \qquad DL<LM+KN.$$

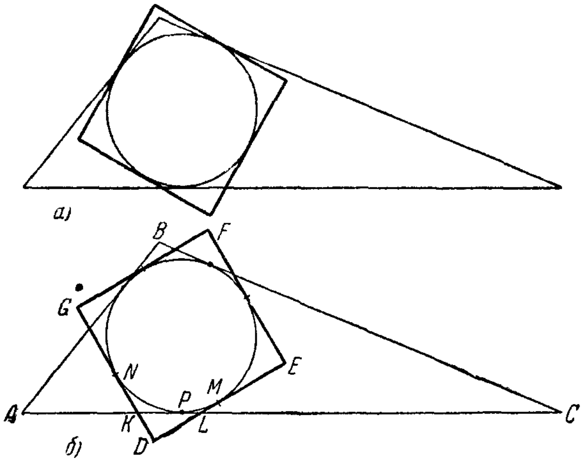
Складывая эти неравенства, получаем:

$$2(LM+KN)>DL+DK, \quad LM+KN>\frac{DL+DK}{2}.$$

---

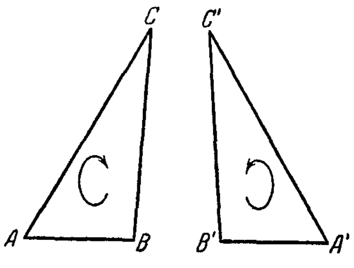
[1]) «Углом» квадрата мы условимся здесь для краткости называть совокупность двух отрезков соседних сторон квадрата от общей вершины до точек касания с окружностью. Очевидно, что длина каждого такого «угла» равна $^1/_4$ периметра.

Но так как сумма $(LM+KN)+(DL+DK)$ равна «углу» квадрата, то из последнего неравенства следует, что сумма $LM+KN$ больше трети «угла».



Черт. 67.

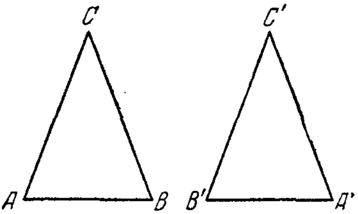
Отсюда вытекает, что часть периметра квадрата, находящаяся внутри треугольника, больше чем $\frac{1}{4}+3\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ периметра квадрата, что и требовалось доказать.



Черт. 68.

13. Перевернем треугольник ABC, положив его на плоскость другой стороной (черт. 68). Полученный треугольник $A'B'C'$ будет, очевидно, симметричен исходному, т. е. будет иметь те же стороны и углы, что и треугольник ABC, однако порядок следования сторон (или углов) при обходе контура треугольника в определенном направлении (например, против часовой стрелки) будет уже иным. Задача заключается в том, чтобы разрезать треугольник $A'B'C'$ на части, из которых можно сложить исходный треугольник ABC.

Ясно, что равнобедренный треугольник (и только равнобедренный треугольник!) можно наложить на ему симметричный (черт. 69). Поэтому если исходный треугольник равнобедренный, то перевернутый треугольник $A'B'C'$ вообще не надо разрезать на части: его можно наложить на треугольник ABC.



Черт. 69.

Выясним теперь, для каких неравнобедренных треугольников можно обойтись одним разрезом. Один разрез разбивает треугольник $A'B'C'$ либо на два треугольника, либо на треугольник и четырехугольник. Посмотрим, в каких случаях из этих частей можно сложить первоначальный треугольник.

А. Пусть разрез $A'D'$ разбивает неравнобедренный треугольник $A'B'C'$ на два треугольника $A'D'B'$ и $A'D'C'$ (черт. 70, *а*). Рассмотрим все возможные случаи, когда из этих частей, сложенных иначе, можно образовать другой треугольник (при этом следует иметь в виду, что, передвигая треугольники $A'D'B'$ и $A'DC'$, мы не должны переворачивать их на другую сторону).

1° Для того чтобы, приложив сторону $A'B'$ треугольника $A'B'D'$ к стороне $A'C'$ треугольника $A'C'D'$, мы получили новый треугольник, надо прежде всего, чтобы было

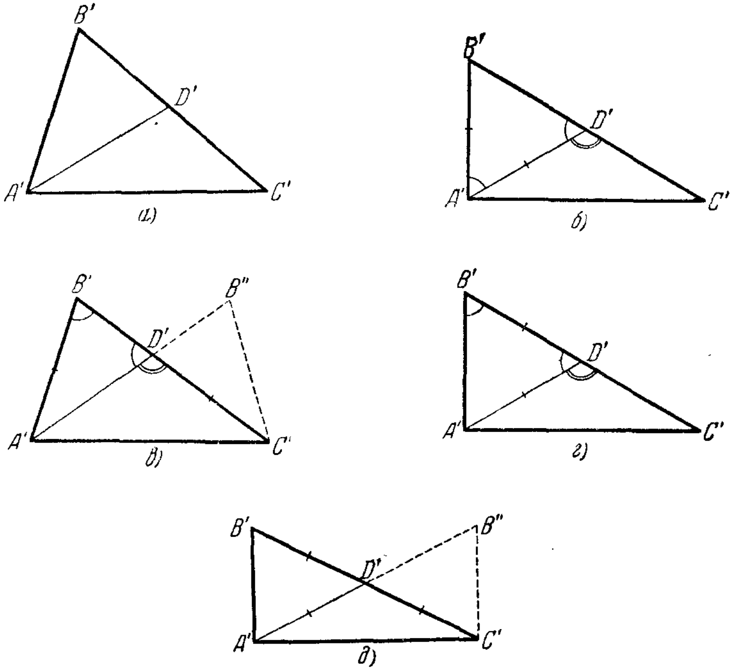
$$A'B' = A'C'.$$

Но это противоречит тому, что треугольник $A'B'C'$ неравнобедренный.

2° Для того чтобы, приложив сторону $A'B'$ треугольника $A'B'D'$ к стороне $D'A'$ треугольника $A'D'C'$, мы получили треугольник, надо чтобы имели место равенства

$$A'B' = A'D' \text{ и } \angle B'A'D' + \angle A'D'C' = 180^\circ$$

(черт. 70, *б*): из последнего вытекает, что $\angle B'A'D' = \angle B'D'A'$, $B'A' = B'D'$. Следовательно, треугольник $A'B'D'$ будет равносторонним ($A'B' = A'D' = B'D'$) и полученный в результате треугольник будет совпадать с $A'B'C'$. Так как треугольник $A'B'C'$ — не равнобедренный, то из последнего результата следует, что в рассмотренном случае из частей $A'B'D'$ и $A'C'D'$ нельзя сложить исходного треугольника ABC.



Черт. 70.

Точно так же рассматривается случай, когда треугольник $A'B'D'$ прикладывается к $A'C'D'$ так, что стороны $A'D'$ и $C'A'$ совпадают.

3° Для того чтобы, приложив сторону $A'B'$ треугольника $A'B'D'$ к стороне $D'C'$ треугольника $A'D'C'$, мы получили новый треугольник, надо чтобы было $A'B' = D'C'$ и $\angle B' + \angle A'D'C' = 180°$. Но из последнего равенства следует

$\angle B' = \angle B'D'A'$, $A'B' = A'D'$; таким образом, мы имеем $A'B' = A'D' = D'C'$ (черт. 70, *в*). Отсюда, очевидно, $\angle C'A'D' = \angle C'$, $\angle B' = \angle B'D'A' = \angle C' + \angle D'A'C'$, т. е. $\angle B' = 2\angle C'$. Кроме того должно быть $\angle B' < 90°$ (иначе было бы невозможно существование равнобедренного треугольника $A'B'D'$ с двумя углами, равными B'). Таким образом, углы исходного треугольника ABC (симметричного треугольнику $A'B'C'$) должны удовлетворять условиям $\angle B = 2\angle C$, $\angle B < 90°$.

Легко видеть, что если эти условия выполняются, то треугольник $A'B'C'$ можно одним разрезом разбить на части, из которых можно сложить треугольник ABC (треугольник $A'C'B''$ на черт. 70, *в* будет симметричен треугольнику $A'B'C'$).

Точно так же рассматривается случай, когда треугольник $A'B'D'$ прикладывается к $A'C'D'$ так, что стороны $B'D'$ и $A'C'$ совпадают.

4° Для того чтобы, приложив сторону $B'D'$ треугольника $A'B'D'$ к стороне $D'A'$ треугольника $A'D'C'$, мы получили новый треугольник (черт. 70, *г*), надо, чтобы было $B'D' = D'A'$, $\angle B' + \angle A'D'C' = 180°$. Но из последнего равенства следует $\angle B' = \angle B'D'A'$, $A'B' = A'D'$; таким образом, мы снова приходим к выводу, что треугольник $A'B'D'$ — равносторонний и полученный перекладыванием треугольник совпадает с $A'B'C'$ (ср. со случаем 2°).

Точно так же рассматривается случай, когда треугольник $A'B'D'$ прикладывается к треугольнику $A'D'C'$ так, что сторона $A'D'$ совпадает с $D'C'$.

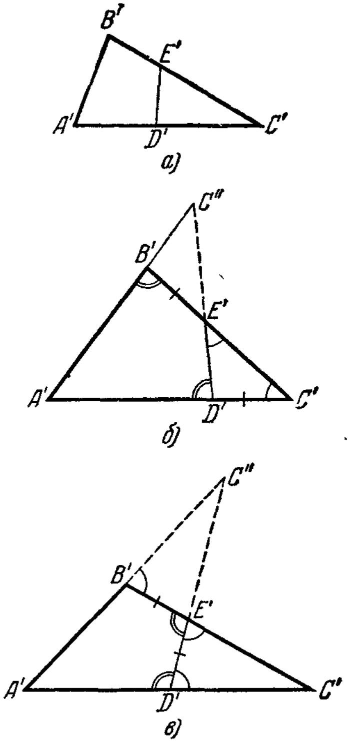
5° Наконец, для того чтобы, приложив сторону $B'D'$ треугольника $A'B'D'$ к стороне $C'D'$ треугольника $A'C'D'$, мы получили новый треугольник, надо, чтобы было $B'D' = C'D'$ (черт. 70, *д*). При этом полученный треугольник $A'B''C'$ будет иметь те же стороны, что и треугольник $A'B'C'$ лишь в том случае, если $A'B'' = B'C'$. Но в этом последнем случае $A'D' = B'D' = C'D'$, т. е. точка D' будет центром описанной вокруг $A'B'C'$ окружности и угол A' треугольника будет прямым (как опирающийся на диаметр описанной окружности). Легко видеть, что если исходный треугольник ABC — прямоугольный, то симметричный ему треугольник $A'B'C'$ всегда можно одним разрезом разбить на части, из которых можно сложить треугольник ABC.

Б. Пусть теперь разрез $D'E'$ разбивает неравнобедренный треугольник $A'B'C'$ на четырехугольник $A'D'E'B'$ и треугольник $C'D'E'$ (черт. 71, *а*). Рассмотрим и здесь все случаи, когда из этих частей, сложенных иначе, можно снова образовать треугольник.

1° Если, приложив треугольник $C'D'E'$ какой-либо из сторон $D'C'$, $C'E'$ к стороне $D'E'$ четырехугольника $A'D'E'B'$, мы и получим треугольник, то он наверное будет совпадать с треугольником $A'B'C'$, т. е. таким способом мы не можем составить исходного треугольника ABC.

2° Так как сумма углов четырехугольника $A'D'E'B'$ при вершинах A' и B' меньше 180°, то сумма углов при вершинах E' и D' больше 180° и мы не сможем получить никакого треугольника, прикладывая треугольник $C'D'E'$ к стороне $A'B'$ четырехугольника.

3° Так как сумма углов A' и C' треугольника меньше 180°, то даже если $C'D'=A'D'$, мы не сможем получить никакого треугольника, прикладывая треугольник $C'D'E'$ стороной $C'D'$ к стороне $A'D'$ четырехугольника $A'D'E'B'$.



Черт. 71.

Точно так же мы не сможем получить треугольника, прикладывая сторону $C'E'$ треугольника $C'D'E'$ к стороне $B'E'$ четырехугольника $A'D'E'B'$.

4° Если, приложив треугольник $C'D'E'$ стороной $C'D'$ к стороне $E'B'$ четырехугольника $A'D'E'B'$, мы получим треугольник (черт. 71, *б*), то должно быть $C'D'=E'B'$, $\angle C'+\angle D'E'B'=180°$, $\angle C'D'E'+\angle B'=180°$. Второе из этих равенств означает, что $\angle C' = \angle C'E'D'$; из третьего вытекает $\angle B' = \angle A'D'E' = \angle C' + \angle C'E'D' = 2\angle C'$. Легко видеть, что если треугольник ABC таков, что $\angle B = 2\angle C$, то треугольник $A'B'C'$ можно разрезать указанным способом на две части, из которых можно сложить треугольник ABC (треугольник $A'D'C''$ на черт. 71, *б* симметричен $A'B'C'$).

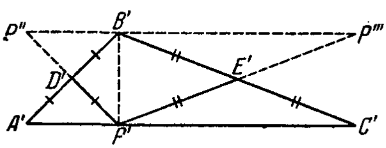
Точно так же разбирается случай, когда треугольник $C'D'E'$ прикладывается стороной $C'E'$ к стороне $A'D'$ четырехугольника $A'D'E'B'$.

5° Наконец, если, приложив треугольник $C'D'E'$ стороной $D'E'$ к стороне $E'B'$ четырехугольника $A'D'E'B'$, мы получим треугольник (черт. 71, *в*), то должно быть $D'E' = E'B'$, $\angle C'D'E' + \angle D'E'B' = 180°$, $\angle C'E'D' + \angle B' = 180°$. Из второго равенства вытекает $\angle C'D'E' = \angle C'E'D'$; из третьего

$$\angle B' + \frac{180° - \angle C'}{2} = 180° \quad \text{или} \quad \angle B' - \frac{\angle C'}{2} = 90°.$$

Легко видеть, что если треугольник ABC таков, что $\angle B - \frac{\angle C}{2} = 90°$, то треугольник $A'B'C'$ можно разрезать указанным способом на две части, из которых можно сложить треугольник ABC (треугольник $A'D'C''$ на черт. 71, *в* симметричен $A'B'C'$).

Точно так же разбирается случай, когда треугольник $C'D'E'$ прикладывается стороной $D'E'$ к стороне $A'D'$ четырехугольника $A'D'E'B'$.



Черт. 72.

Таким образом, одним разрезом можно обойтись только в тех случаях, если:

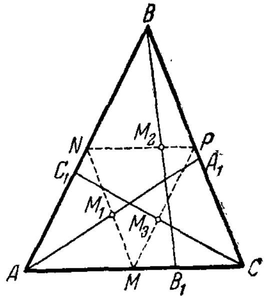
1) в треугольнике ABC один из углов равен удвоенному другому (черт. 71, *б*); при этом если этот угол треугольника острый, то разрез можно произвести двумя способами (черт. 71, *б* и 70, *в*);

2) треугольник ABC прямоугольный (черт. 70, *д*);

3) в треугольнике ABC один угол тупой и превышает 90° на половину другого угла (черт. 71, *в*).

Во всех остальных случаях можно обойтись двумя разрезами. Доказать это совсем просто. Пусть $B'P'$ (черт. 72) есть высота треугольника $A'B'C'$, проходящая внутри треугольника (у каждого треугольника есть хотя бы одна такая высота). Разрежем треугольник $A'B'C'$ по медианам $P'D'$ и $P'E'$ треугольников $A'P'B'$ и $C'P'B'$ и приложим треугольник $A'D'P'$ стороной $D'A'$ к стороне $D'B'$ четырехугольника $D'B'E'P'$, а треугольник $C'E'P'$ стороной $C'E'$ к стороне $B'E'$ этого же четырехугольника. Мы получим треугольник $P''P'P'''$, симметричный $A'B'C'$.

14. Середины M_1, M_2, M_3 отрезков AA_1, BB_1, CC_1 (черт. 73) лежат на средних линиях MN, NP и MP треугольника ABC, параллельных соответственно сторонам BC, AC и AB и притом не на концах этих средних линий (иначе одна из точек A_1, B_1, C_1 совпала бы с одной из вершин треугольника ABC). Средние линии треугольника ABC сами составляют треугольник. Но никакая прямая, не проходящая через вершины треугольника, не пересекает одновременно все три его стороны. Поэтому точки M_1, M_2, M_3, которые лежат на сторонах (но не в вершинах) треугольника, составленного из средних линий треугольника ABC, не могут лежать на одной прямой.

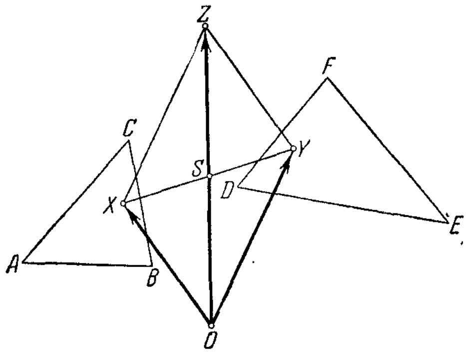


Черт. 73.

15. В решении этой задачи мы будем для удобства называть вершину Z параллелограмма $OXZY$ *суммой* точек X и Y и писать в этом случае $Z = X + Y$ (т. е. будем здесь считать, что точки плоскости складываются по правилу параллелограмма, аналогично векторным величинам; см. примечание к условию задачи).

Прежде всего отметим, что вид фигуры Φ, которую заполняют точки Z, не зависит от выбора точки O. Действительно, обозначим через S середину отрезка XY, где X есть точка треугольника ABC, а Y — точка треугольника DEF (черт. 74). Легко видеть, что если $Z = X + Y$, то $OZ = 2OS$. Отсюда следует, что фигура Φ, заполняемая точками Z, подобна фигуре Φ', заполняемой точками S — серединами всевозможных отрезков XY — с коэффициентом подобия 2 (и центром подобия O). Таким образом, фигуры Φ, получаемые при различных выборах точки O, все будут подобны с одним и тем же коэффициентом подобия одной и той же фигуре Φ'. Следовательно, и форма и размеры фигуры Φ будут одни и те же, как бы мы ни выбирали точку O.

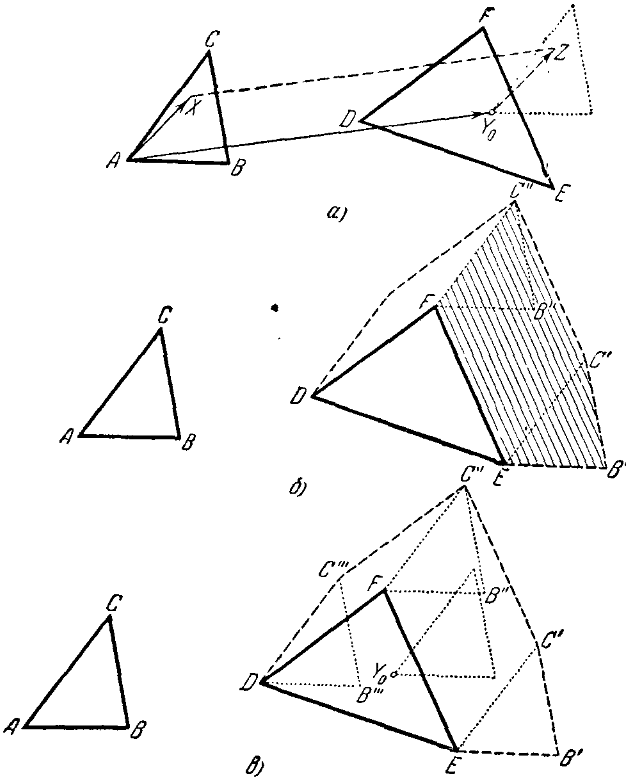
Учитывая предыдущее замечание, мы можем считать, что точка O совпадает с вершиной A треугольника ABC. Выбе-



Черт. 74.

рем теперь произвольную точку Y_0 треугольника DEF и составим всевозможные суммы $Z = X + Y_0$, где X пробегает все точки треугольника ABC (черт. 75, *а*). Нетрудно видеть, что в результате мы получим тот же треугольник ABC, только перенесенный параллельно таким образом, что вершина A перешла в точку Y_0. Если теперь параллельно перенести треугольник ABC всевозможными способами так, чтобы вершина A совпадала с каждой точкой Y треугольника DEF, то фигура, заполненная всеми этими треугольниками, и будет искомой фигурой Φ (черт. 75, *б*).

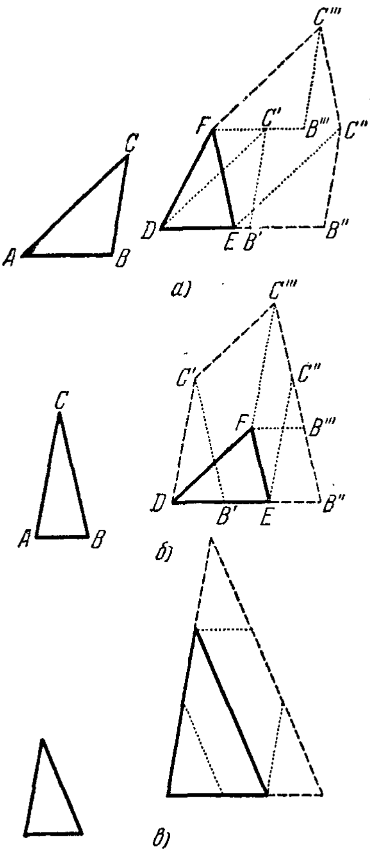
Рассмотрим теперь внимательней ту фигуру Φ, которая получится в результате описанного построения. Для простоты мы сначала будем считать, что треугольники ABC и DEF не имеют параллельных сторон. Очевидно, для того чтобы определить границу фигуры Φ, достаточно обнести треугольник ABC так, чтобы вершина A описывала контур треугольника DEF. При этом, когда вершина A двигается по стороне EF треугольника DEF, переносимый треугольник заметет фигуру $EB'C'C''F$, заштрихованную на черт. 75, *б*. Составив теперь аналогичные фигуры $C''B''B'''DC'''$ и $C'''DEB'C'$, которые заметет переносимый треугольник при движении вершины A по сторонам FD и DE, мы убедимся, что фигура Ф



Черт. 75.

будет представлять собой шестиугольник $DEB'C'C''C'''$ (черт. 75, *в*), стороны которого равны и параллельны сторонам треугольников ABC и DEF ($EB' \# AB$, $B'C' \# BC$, $C'''D \# CA$; $C'C'' \# EF$, $C''C''' \# FD$). Периметр шестиугольника $DEB'C'C''C'''$ равен, очевидно, сумме периметров треугольников ABC и DEF.

В том случае, когда треугольники ABC и DEF имеют пару параллельных сторон ($AB \parallel DE$, черт. 76, *а*), причем треугольники лежат по одну сторону от этих сторон, фигура Ф будет представлять не шестиугольник, а пятиугольник, одна сторона которого равна сумме этих параллельных сторон (черт. 76, *а*); если таких пар параллельных сторон будет две или три, то Ф будет являться четырехугольником (черт. 76, *б*) или треугольником (черт. 76, *в*). Периметр Ф во всех случаях будет равняться сумме периметра треугольников ABC и DEF. Предоставляем читателям более подробно разобрать эти случаи.



Черт. 76.

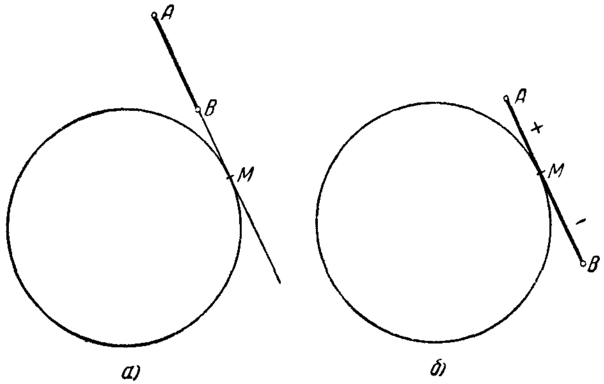
Примечание. См. также цитированную в примечании к задаче книгу И. М. Яглома и В. Г. Болтянского, в которой имеется полное доказательство важной теоремы, обобщающей предложения, которые составляют содержание настоящей задачи.

16. Отметим прежде всего, что путь из точки A в точку B, определяемый по правилам, указанным в условии задачи, равен разности $AM - BM$ длин t_A и t_B касательных, проведенных к окружности в точках A и B (черт. 77, *а*, *б*).

Пусть теперь весь путь совершается по замкнутой ломаной с последовательными вершинами в точках $A, B, C, \ldots, K, L$ (см. черт. 6 на стр. 12). Если длины касательных к окружности в точках A, B, C, ..., K, L обозначить соответственно через t_A, t_B, t_C, ..., t_K, t_L, то согласно сделанному замечанию длина общего пути по ломаной будет равна

$$(t_A - t_B) + (t_B - t_C) + \ldots + (t_K - t_L) + (t_L - t_A) = 0,$$

что и требовалось доказать.



Черт. 77.

17. а) Пусть A — самая левая (или одна из двух самых левых) из наших пяти точек [1]) (черт. 70, *а*). Проведем через A вертикальную прямую и будем вращать ее, пока она не пройдет еще через одну из наших точек — точку B. Затем будем продолжать вращать прямую AB в том же направлении вокруг B, пока она не пройдет через третью точку C; затем будем вращать в том же направлении прямую BC вокруг C и т. д. Окончательно мы получим выпуклый многоугольник, внутри которого расположены все наши точки. При этом возможны следующие случаи:

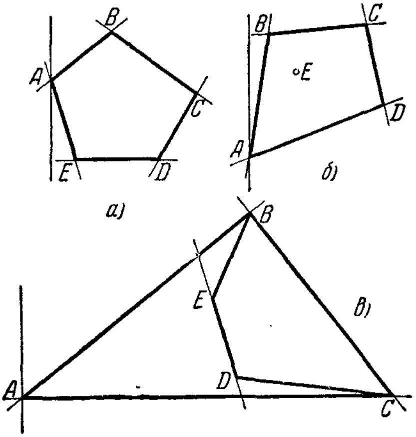
1° Пять точек являются вершинами выпуклого пятиугольника (черт. 78, *а*); тогда любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырехугольника.

---

[1]) То-есть через A можно провести прямую («вертикаль») так, что все точки лежат по одну сторону от нее (ср. с подстрочным примечанием на стр. 68).

2° Четыре точки являются вершинами выпуклого четырехугольника, а пятая лежит внутри этого четырехугольника (черт. 78, *б*).

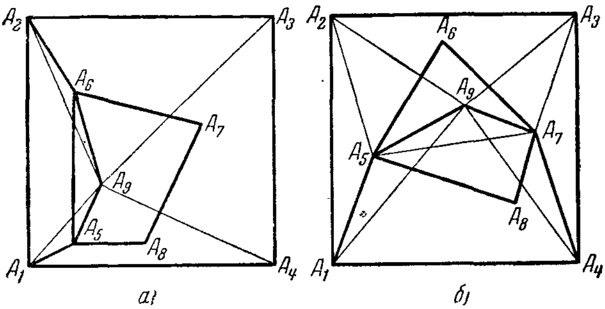
3° Три точки A, B и C являются вершинами треугольника, а точки D и E лежат внутри треугольника (черт. 78, *в*). Пусть прямая DE пересекает, например, стороны AB и AC треугольника ABC; тогда, очевидно, четырехугольник $DEBC$ является выпуклым.



Черт. 78.

б) Соединим точку A_9 с точками A_1, A_2, A_3, A_4. При этом квадрат разобьется на четыре треугольника $A_1A_2A_9$, $A_2A_3A_9$, $A_3A_4A_9$, $A_4A_1A_9$. Допустим сначала, что в одном из этих треугольников (пусть это будет для определенности треугольник $A_1A_2A_9$) не содержится ни одной из точек A_5, A_6, A_7, A_8 (черт. 79, *а*) (заметим, что так как никакие три точки не лежат на одной прямой, то точки A_5, A_6, A_7, A_8 не могут лежать на сторонах треугольников). Какая-то одна сторона четырехугольника $A_5A_6A_7A_8$ пересекает треугольник $A_1A_2A_9$; пусть это будет, например, сторона A_5A_6. В этом случае точки A_1, A_5, A_9, A_6, A_2 являются вершинами выпуклого пятиугольника. Действительно, мы можем предположить, что точки у нас занумерованы так, что вершина A_5 лежит в треугольнике $A_1A_9A_4$. Тогда углы $A_2A_1A_5$ и $A_1A_2A_6$ меньше углов квадрата, т. е. острые, каждый из углов $A_1A_5A_9$ и $A_9A_6A_2$ меньше 180°, ибо точки A_5 и A_6 расположены вне треугольника $A_1A_2A_9$. Наконец, и угол $A_5A_9A_6$ меньше 180°, так как точка A_9 лежит вне выпуклого четырехугольника $A_1A_5A_6A_2$. Таким образом мы видим, что все углы пятиугольника $A_1A_5A_9A_6A_2$ меньше 180°, отсюда следует, что этот пятиугольник выпуклый.

Рассмотрим теперь случай, когда в каждом из треугольников $A_1A_2A_9$, $A_2A_3A_9$, $A_3A_4A_9$ и $A_4A_1A_9$ имеется одна вершина четырехугольника $A_5A_6A_7A_8$ (черт. 79, *б*). Возьмем две вершины этого четырехугольника, лежащие в несмежных треугольниках, например, точки A_5 и A_7, лежащие соответственно в треугольниках $A_1A_2A_9$ и $A_3A_4A_9$. Соединим их между собой и соединим точку A_5 с A_1 и с A_2 и точку A_7 с A_3 и с A_4. Точка A_9 лежит в одном из четырехугольников $A_1A_5A_7A_4$

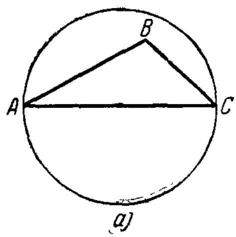


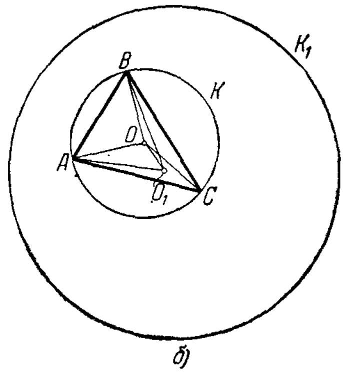
Черт. 79.

или $A_2A_3A_7A_5$. Пусть, например, она лежит в четырехугольнике $A_2A_5A_7A_3$. Тогда пятиугольник $A_1A_5A_9A_7A_4$, как легко видеть, выпуклый; доказательство этого аналогично доказательству того, что на черт. 79, *а* пятиугольник $A_1A_5A_9A_6A_2$ выпуклый.

18. Первое решение. Очевидно, что если три точки A, B и C являются вершинами тупоугольного (или прямо угольного) треугольника, то наименьший круг, заключающий эти три точки, имеет диаметром наибольшую сторону треугольника ABC (черт. 80, *а*). Покажем, что если точки A, B и C являются вершинами остроугольного треугольника, то наименьшим содержащим их кругом будет круг, описанный вокруг треугольника ABC.

Действительно, пусть K_1 — произвольный круг, содержащий вершины A, B и C остроугольного треугольника, и O_1 есть центр этого круга (черт. 80, *б*), Докажем, что радиус круга K_1 больше, чем радиус круга K, описанного вокруг ABC. Пусть O — центр круга K. Точка O_1 лежит внутри (или на стороне) одного из трех углов AOB, BOC и COA. Пусть для определенности она лежит внутри (или на стороне) угла AOC. Если точка O_1 лежит на продолжении BO, то, очевидно, $O_1B > OB$, откуда и следует требуемое. Если точка O_1 не лежит на продолжении BO, то она лежит внутри (или на стороне, отличной от BO) одного из углов ABO и CBO. Пусть для определенности это будет угол CBO. Соединим



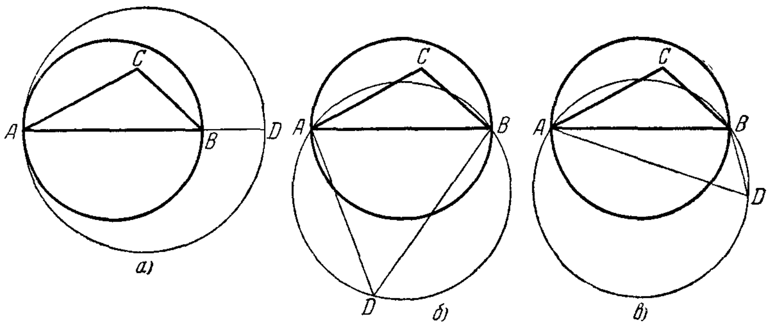


Черт. 80.

точку O_1 с точками A, O и B. Из двух углов AOO_1 и BOO_1 по крайней мере один тупой (так как угол AOB меньше $180°$, ибо треугольник ABC — остроугольный, то $\angle AOO_1 + \angle BOO_1 > 180°$). Пусть, например, угол BOO_1 — тупой. Тогда в треугольнике BOO_1 сторона BO меньше стороны BO_1, откуда и следует требуемое.

Пусть теперь A, B, C — такие три из данных нам точек, что *наименьший содержащий их круг K не меньше, чем наименьший круг, содержащий какие-нибудь другие три из наших точек.* Мы утверждаем, что все остальные точки лежат внутри круга K; отсюда уже сразу следует предложение настоящей задачи. Допустим, что это не так: пусть одна из наших точек (обозначим ее D) лежит вне K. Рассмотрим два случая:

1° Треугольник ABC — тупоугольный или прямоугольный (черт. 81). Пусть для определенности C — вершина тупого (прямого) угла; тогда K есть круг, для которого AB является диаметром. Если точки A, B и D лежат на одной прямой (черт. 81, *а*), то, очевидно, наименьший содержащий их круг имеет диаметр $AD > AB$, что противоречит нашему предположению относительно точек A, B и C. Если точки A, B, D образуют остроугольный треугольник (черт. 81, *б*), то наименьший содержащий их круг есть описанный круг, а его диаметр превосходит любую из сторон, в частности, превосходит AB, что снова противоречит нашему предположению. Если же, наконец, треугольник ABD тупоугольный или прямоугольный (черт. 81, *в*), то так как угол при вершине D

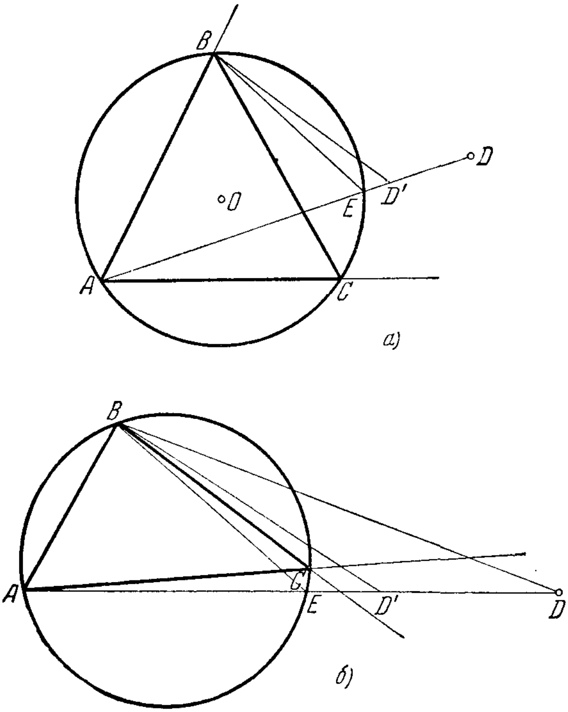


Черт. 81.

обязательно острый (иначе D не может лежать вне круга K), то, следовательно, сторона, лежащая в этом треугольнике против тупого (или прямого) угла, больше AB. Радиус же наименьшего круга, содержащего точки A, B, D, равен половине этой стороны, и мы снова приходим к противоречию.

2° Треугольник ABC — остроугольный (черт. 82). Найдется такая сторона этого треугольника, что треугольник ABC и точка D находятся по одну сторону от прямой, на которой лежит эта сторона. Пусть для определенности это сторона AB.

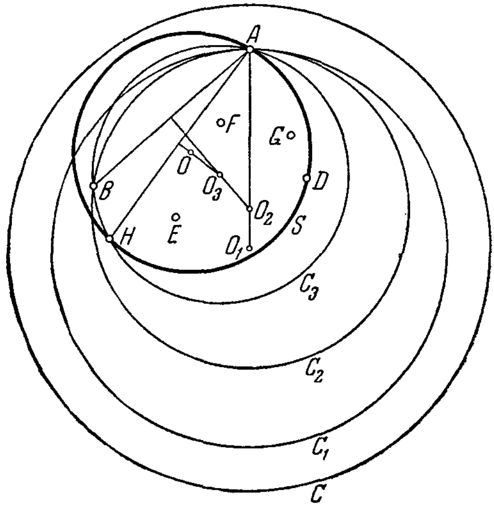
Точка D лежит внутри (или на стороне) одного из трех углов CAB, CBA и угла, вертикального с углом ACB. Если имеет место один из первых двух случаев, например, если D лежит внутри (или на стороне) угла CAB (черт. 82, *а*), то соединим точку D с точкой A прямолинейным отрезком. Пусть E есть вторая точка пересечения AD с окружностью круга K. Если AE есть диаметр круга K, то AD больше диаметра круга K, и круг, содержащий A и D, не может быть меньше K, т. е. мы приходим к противоречию. Если же AE не есть диаметр K, то центр K лежит внутри одного из треугольников AEC и AEB и, значит, один из этих треугольников (пусть это, например, AEB) остроугольный. Пусть D'



Черт. 82.

такая точка отрезка ED, что и треугольник $AD'B$ остроугольный, т. е. угол ABD' острый (в частности, точка D' может и совпадать с D). Наименьший круг, содержащий треугольник $AD'B$, есть описанный круг, но этот круг имеет радиус, больший, чем круг, описанный вокруг треугольника AEB, т. е. чем K (это следует из того, что в этом круге на сторону AB опирается меньший угол). С другой стороны, всякий круг, содержащий точки A, D, B, содержит также и точки A, D', B, т. е. мы снова пришли к противоречию.

Нам осталось еще рассмотреть случай, когда точка D лежит внутри (или на стороне) угла, вертикального с углом ACB (черт. 82, *б*). В этом случае соединим точку D с A и B; хоть один из углов DAB или DBA будет острым; пусть, например, угол DAB острый. Пусть E — точка пересечения отрезка DA с окружностью круга K. Треугольник AEB остроугольный ($\angle AEB = \angle ACB$, $\angle EBA < \angle CBA$ и $\angle EAB$ острый по предположению). Дальше повторяются вышеприведенные рассуждения.

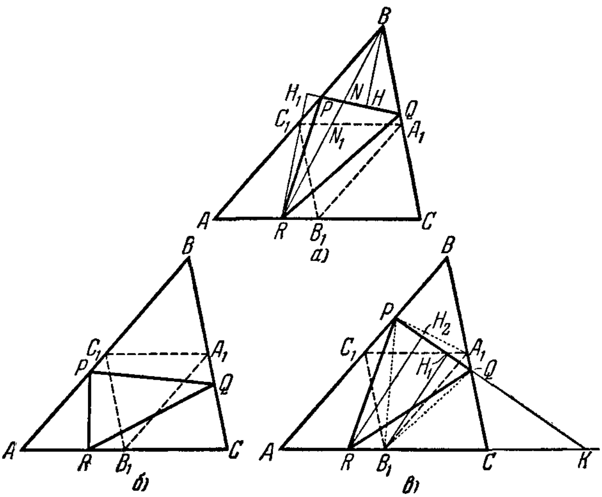


Черт. 83.

Второе решение. Пусть C — какая-либо окружность, внутри которой заключаются все n точек (черт. 83). Будем последовательно уменьшать эту окружность. Прежде всего, если окружность C не содержит ни одной из наших точек, то мы можем заменить ее меньшей окружностью C_1, концентрической с C и проходящей через какую-то из наших точек A (A есть та из точек, которая расположена дальше других от центра окружности C). Далее, если окружность C_1 содержит единственную точку A из числа наших n точек, то мы можем заменить ее меньшей окружностью C_2, проходящей через ту же точку A и еще через одну точку B; центр O_2 окружности C_2 лежит на прямой O_1A, где O_1 — центр C_1 (B есть та из наших точек, для которой перпендикуляр к середине AB пересекает O_1A в наиболее близкой к O_1 точке). Наконец, если окружность C_2 содержит только две точки A и B из числа наших n точек, причем эти две точки не лежат на концах одного диаметра окружности C_2, или если C_2 содержит больше двух точек, но на этой окружности имеется дуга AB, бóльшая полуокружности и свободная от точек нашей совокупности, то эту окружность можно еще уменьшить, заменив ее новой окружностью C_3, проходящей через те же точки A и B и еще через одну точку H (H есть та из наших точек, для которой перпендикуляр к середине AH пересекает перпендикуляр к середине AB в наиболее близкой к O_2 точке). Если окружность C_3 еще имеет дугу, бóльшую полуокружности, свободную от наших точек, то эту окружность можно заменить еще меньшей при помощи такого же приема, и т. д.

Окончательно мы заключаем, что среди всех окружностей, заключающих внутри себя наши n точек, можно найти такую окружность S, для которой две из наших точек A и B являются концами одного диаметра, или такую, которая описана вокруг остроугольного треугольника ABD, образованного тремя из наших точек. Но так как точки A, B или соответственно точки A, B, D по условию задачи можно заключить внутрь окружности радиуса 1, то эта окружность S не может иметь радиус, больший 1 (здесь используется то, что из всех окружностей, заключающих внутри себя три точки, являющиеся вершинами остроугольного треугольника, описанная вокруг этого треугольника окружность является наименьшей; см. начало первого решения задачи).

19. Пусть A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 — средние линии треугольника ABC. Назовем соответствующими стороны треугольников $A_1B_1C_1$ и PQR, концы которых расположены на сторонах одного и того же угла треугольника ABC. Тогда могут представиться два случая: либо найдется пара непересекающихся соответствующих сторон, например PQ и C_1A_1, т. е. PQ целиком лежит внутри треугольника C_1BA_1 (черт. 84, *а*) или внутри трапеции ACA_1C_1 (черт. 84, *б*), либо все соответствующие стороны попарно пересекаются (черт. 84, *в*). При этом, если PQ целиком лежит внутри трапеции ACA_1C_1 и, например, R лежит на отрезке AB_1, то PR лежит внутри треугольника AC_1B_1 (черт. 84, *б*); если R лежит на отрезке



Черт. 84.

B_1C, то QR лежит внутри треугольника B_1A_1C. Поэтому остается рассмотреть только два случая: либо найдется сторона вписанного треугольника, например PQ, лежащая внутри соответствующего треугольника C_1BA_1, либо все соответствующие пары сторон треугольников PQR и $A_1B_1C_1$ пересекаются.

Рассмотрим сначала первый случай (черт. 84, *а*). Легко видеть, что $S_{BPQ} < S_{PQR}$. Действительно, соединим B с R; пусть BR пересекает PQ и C_1A_1 соответственно в точках N и N_1. Тогда, если $BH \perp PQ$ и $RH_1 \perp PQ$, то

$$\frac{S_{BPQ}}{S_{PQR}} = \frac{{}^1/_2\, PQ \cdot BH}{{}^1/_2\, PQ \cdot RH_1} = \frac{BH}{RH_1},$$

а это последнее отношение равно $\frac{BN}{NR} < \frac{BN_1}{N_1R} = 1$ (ибо A_1C_1 — средняя линия треугольника).

Поэтому

$$\frac{S_{PQB}}{S_{PQR}} < 1,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь второй случай (черт. 84, *з*). Если PQ пересекает C_1A_1, то либо $BP < BC_1 = \frac{1}{2}BA$, либо $BQ < BA_1 = \frac{1}{2}BC$; пусть для определенности $BP < \frac{1}{2}BA$. Прямая PQ пересекает продолжение AC в такой точке K, что C лежит между K и A. Из того, что $BP < \frac{1}{2}BA$, следует, что $AR < \frac{1}{2}AC$, ибо в противном случае QR и A_1B_1 не имели бы общих точек. Значит, на прямой KC имеем следующий порядок точек: K, C, B_1, R, A. Отсюда следует, что

$$S_{QPR} > S_{QPB_1},$$

так как при общем основании PQ высота RH_2 треугольника PQR больше высоты B_1H_1 треугольника B_1PQ (ибо точка R дальше отстоит от вершины K угла PKA, чем B_1). Точно так же найдем, что

$$S_{QPB_1} > S_{A_1PB_1},$$

$$S_{A_1PB_1} = S_{A_1C_1B_1} = \frac{1}{4}S_{ABC}.$$

Из сопоставления полученных неравенств найдем, что

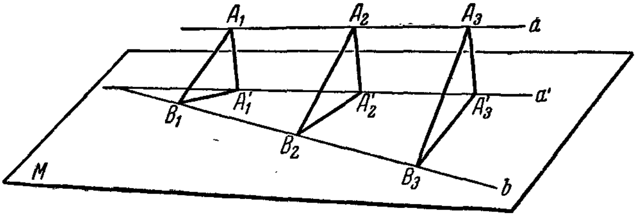
$$S_{PQR} > \frac{1}{4}S_{ABC},$$

вследствие чего

$$S_{ARP} + S_{CQR} + S_{BPQ} < \frac{3}{4}S_{ABC}.$$

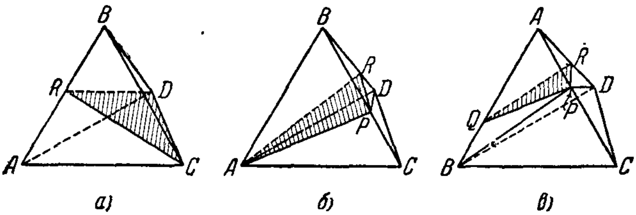
Из трех слагаемых в левой части хотя бы одно не больше $\frac{1}{4}S_{ABC}$ и, следовательно, меньше S_{PQR}, что и требовалось доказать.

20. Докажем предварительно следующее. Пусть в пространстве даны две прямые a и b. Из трех последовательных точек A_1, A_2, A_3 прямой a опущены перпендикуляры A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 на прямую b. Тогда A_2B_2 меньше одного из двух отрезков A_1B_1 и A_3B_3. Действительно, проведем через прямую



Черт. 85.

b плоскость M, параллельную прямой a (черт. 85). Пусть A'_1, A'_2, A'_3 — проекции соответственно точек A_1, A_2, A_3 на плоскость M. На основании теоремы о трех перпендикулярах заключаем, что отрезки A'_1B_1, A'_2B_2, A'_3B_3 все перпендикулярны к b. Так как отрезок A'_2B_2, очевидно, меньше одного из двух отрезков A'_1B_1, A'_3B_3, то отрезок A_2B_2 меньше одного из двух отрезков A_1B_1, A_3B_3, что и требовалось доказать.



Черт. 86.

Переходим теперь к решению поставленной задачи.

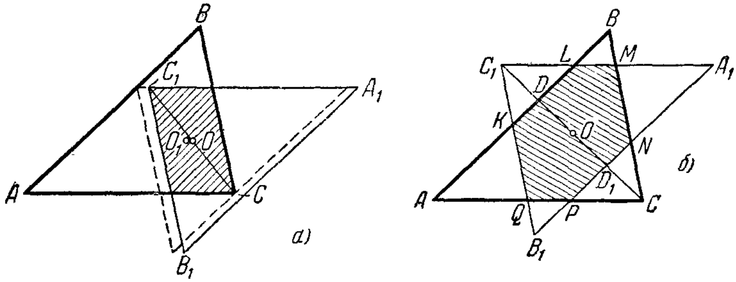
1° Пусть в треугольной пирамиде (тетраэдре) $ABCD$ сечение RCD проходит через ребро CD (черт. 86, a). В треугольниках ACD, RCD, BCD при общем основании CD высоты, опущенные на эту сторону, суть перпендикуляры, рассмотренные выше. Так как R лежит между A и B, то S_{RCD} меньше площади одного из треугольников ACD и BCD.

2° Рассмотрим теперь какое-нибудь сечение APR тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через одну его вершину, например A (черт. 86, *б*). Соединим точку P с противолежащей вершиной D треугольника BCD. Тогда в тетраэдре $PABD$ треугольное сечение PAR проходит через его ребро AP. Поэтому либо $S_{PAR} < S_{PAB}$, либо $S_{PAB} < S_{APD}$. В первом случае имеем $S_{PAR} < S_{ABC}$, так как $\triangle PAB$ есть часть треугольника ABC. Во втором случае, применяя к сечению ADP тетраэдра $ABCD$ результат п. 1°, находим, что S_{APD} меньше площади одной из граней ACD или ABD, поэтому и подавно то же имеет место по отношению S_{PAR}. Итак, наше утверждение доказано и для этого вида треугольных сечений.

3° Рассмотрим, наконец, сечение PQR наиболее общего вида (черт. 86, *в*). Произвольную вершину P треугольника PQR, лежащую на некотором ребре AC тетраэдра, соединим с концами B и D противоположного ребра BD. По доказанному в п. 2° находим, что S_{PQR} меньше площади хотя бы одной грани тетраэдра $PABD$. Но для любой грани тетраэдра $PABD$ найдется равная ей или бóльшая грань тетраэдра $CABD$. Действительно, грань ABD у этих двух тетраэдров общая, треугольники PAB и PAD суть части треугольников ABC, соответственно ADC, а S_{PBD} меньше либо S_{BAD}, либо S_{BCD}, так как PBD есть сечение тетраэдра $ABCD$, проходящее через его ребро. Отсюда следует справедливость теоремы.

21. Предположим, что нам известен центр O искомого центрально-симметричного многоугольника. Симметрично отразив относительно точки O данный треугольник ABC вместе с помещенным внутри него центрально-симметричным многоугольником (который при этом перейдет в себя), мы убедимся, что искомый многоугольник вписан также и в треугольник $A_1B_1C_1$, получаемый из ABC симметрией относительно O. Но так как пересечение треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ является, очевидно, центрально-симметричным многоугольником с центром в O, то *наибольший вписанный в треугольник ABC центрально-симметричный многоугольник с центром в O должен совпасть с пересечением ABC и $A_1B_1C_1$*.

Теперь нам осталось выбрать точку O таким образом, чтобы пересечение треугольника ABC и треугольника $A_1B_1C_1$, полученного из ABC симметрией относительно точки O, имело наибольшую площадь. В зависимости от положения точки O это пересечение может быть параллелограммом (черт. 87, *а*), или центрально-симметричным шестиугольником (черт. 87, *б*). Однако сразу видно, что в случае, когда пересечение представляет собой параллелограмм, всегда можно так изменить положение точки O, чтобы пересечение ABC и $A_1B_1C_1$



Черт. 87.

стало шестиугольником и увеличилось по площади (см. черт. 87, *а*)[1]). Следовательно, наибольший вписанный в данный треугольник ABC центрально-симметричный многоугольник должен быть шестиугольником.

Обозначим шестиугольник, являющийся пересечением треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, через $KLMNPQ$ (см. черт. 87, *б*). Для того чтобы площадь шестиугольника $KLMNPQ$ была возможно больше, надо, чтобы сумма площадей треугольников LBM, NCP и QAK была возможно меньше. Но все эти треугольники подобны треугольнику ABC; площадь каждого из этих треугольников относится к площади треугольника ABC соответственно, как $\frac{LB^2}{AB^2}$, $\frac{NP^2}{AB^2}$ и $\frac{AK^2}{AB^2}$, и, следовательно, сумма их площадей относится к площади треугольника

---

[1]) При этом параллелограмм, один угол которого совпадает с углом треугольника ABC, а противоположная вершина лежит на противолежащей стороне треугольника, мы для удобства считаем шестиугольником с двумя противоположными сторонами, равными нулю.

ABC, как $\frac{LB^2+NP^2+AK^2}{AB^2}$. Таким образом, нам остается выбрать точку O таким образом, чтобы сумма $LB^2+NP^2+AK^2$ была возможно меньшей.

Так как $NP=KL$ (противоположные стороны шестиугольника $KLMNPQ$ переходят друг в друга при симметрии относительно точки O и, следовательно, равны), то

$$AK+NP+LB=AK+KL+LB=AB.$$

Обозначим $AK=x$, $NP=y$, $LB=z$, $AB=x+y+z=a$. Нетрудно показать, что сумма $x^2+y^2+z^2$ достигает минимума при $x=y=z=\frac{a}{3}$. Действительно,

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)-3\left(\frac{a}{3}\right)^2&=(x^2+y^2+z^2)-\frac{(x+y+z)^2}{3}=\\&=\frac{2}{3}[x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz]=\\&=\frac{1}{3}[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2]\geqslant 0.\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что сумма $x^2+y^2+z^2=AK^2+KL^2+LB^2$ будет иметь наименьшее значение, если $AK=KL=LB=\frac{AB}{3}$ (т. е. $x-y=x-z=y-z=0$). В этом случае площадь каждого из трех треугольников, отсекаемых от треугольника ABC сторонами треугольника $A_1B_1C_1$, равна $\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$ и, следовательно, $S_{KLMNPQ}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$.

Остается выяснить, для какого положения точки O имеют место равенства $AK=KL=LB$. Соединим точку C с точкой C_1. Прямая CC_1 проходит через O и пересекает AB и A_1B_1 в каких-то двух точках, которые мы обозначим через D и D_1. Из соображений симметрии следует

$$OD=OD_1,\ DC_1=D_1C,$$

а из того, что $KL=\frac{1}{3}A_1B_1$, следует, что

$$DC_1=\frac{1}{3}D_1C_1.$$

Из этих равенств вытекает, что

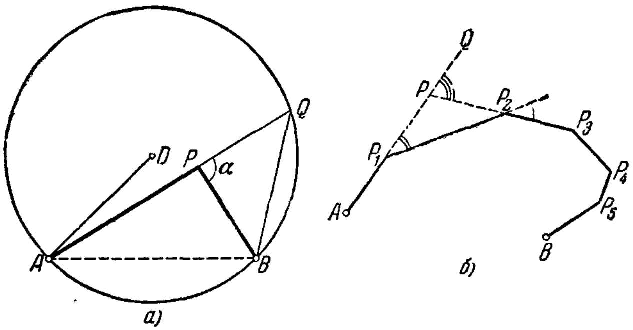
$$C_1D = DO = OD_1 = D_1C.$$

Таким образом,

$$CO = \frac{2}{3} CD;$$

отрезок прямой, проходящей через точку O и вершину C, заключенный внутри треугольника ABC, делится точкой O в отношении $2:1$, считая от вершины. Точно так же доказывается, что отрезки прямых, проходящих через точку O и вершину A, соответственно B, заключенные внутри треугольника ABC, делятся точкой O в отношении $2:1$, считая от вершины. Из последнего нетрудно вывести, что O есть точка пересечения медиан треугольника ABC.

22. а) Прежде всего заметим, что теорема является справедливой, если рассматриваемая ломаная состоит всего из двух звеньев AP и PB (черт. 88, *а*). Действительно, продолжим

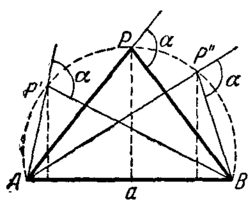


Черт. 88.

в этом случае прямую AP за точку P и на продолжении отложим отрезок $PQ = PB$. Так как треугольник BPQ равнобедренный, то $\angle BQA = \frac{180° - \angle BPQ}{2} = \frac{180° - \alpha}{2}$; следовательно, точка Q лежит на дуге окружности, вмещающей угол $\frac{180° - \alpha}{2}$, построенной на отрезке AB. Дуге AB этой окружности отвечает центральный угол $180° - \alpha$; так как хорда

$AB=1$, то отсюда следует, что радиус окружности равен $\frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{180^\circ-\alpha}{2}}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Но $AQ=AP+PB$ не превосходит диаметра этой окружности; следовательно, $AP+PB\leqslant\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, что и требовалось доказать. $AP+PB$ равно $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ только в том случае, если треугольник APB равнобедренный.

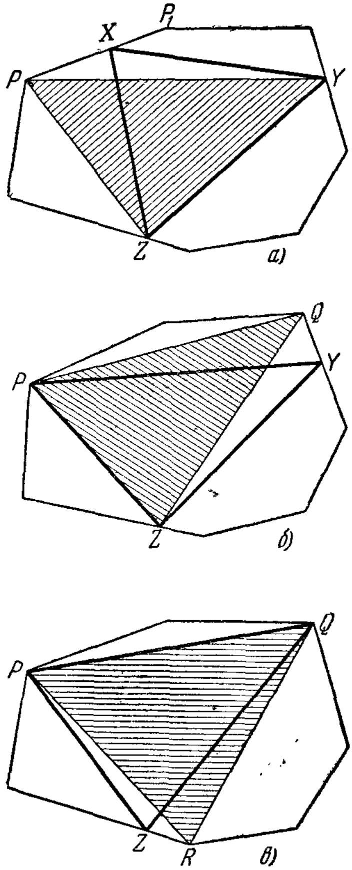
Докажем теперь теорему методом математической индукции. Предположим, что требуемая теорема уже доказана для всех n-звенных ломаных, и докажем, что в таком случае она будет также справедливой для $(n+1)$-звенной ломаной $AP_1P_2\ldots P_nB$. Продолжим стороны AP_1 и P_3P_2 выпуклого многоугольника $AP_1P_2\ldots P_nB$ до пересечения в точке P (черт. 88, *б*). Так как сумма внешних углов ломаной при точках P_1 и P_2 по условию меньше $2d$, то точка P будет лежать на продолжении AP_1 за точку P_1. Далее внешний угол QPP_2 треугольника P_1PP_2 равен сумме внешних углов PP_1P_2 и PP_2P_1 многоугольника $AP_1P_2\ldots P_nB$; отсюда следует, что сумма внешних углов n-звенной ломаной $APP_3P_4\ldots P_nB$ при точках P, P_3, $P_4,\ldots$, P_n будет равна сумме α внешних углов $(n+1)$-звенной ломаной $AP_1P_2\ldots P_nB$. Так как мы считаем, что теорема уже доказана для всех n-звенных ломаных, то длина ломаной $APP_3P_4\ldots P_nB$ не превосходит $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Но длина ломаной $AP_1P_2\ldots P_nB$, очевидно, меньше длины ломаной $APP_3\ldots P_nB$ (ибо $P_1P_2>P_1P+PP_2$); следовательно, длина ломаной $AP_1P_2\ldots P_nB$ и подавно меньше $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, что и требовалось доказать.



Черт. 89.

б) Эта задача очень близка к предшествующей. Прежде всего из черт. 89 сразу видно, что из всех треугольников

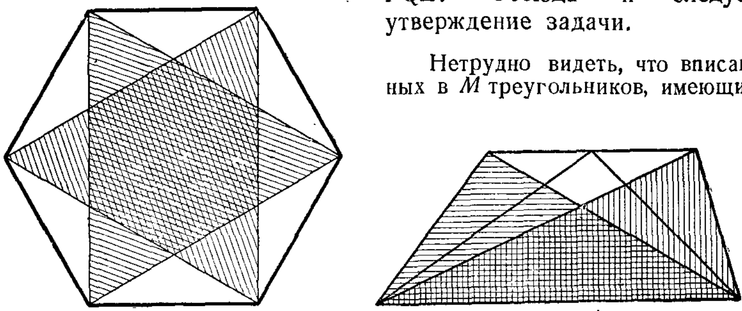
APB с основанием $AB=a$ и внешним углом при вершине P, равным α (т. е. с углом APB, равным $180°-\alpha$), наибольшую площадь $\left(\text{равную } \frac{a^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4}\right)$ имеет равнобедренный треугольник. То, что всякий выпуклый n-угольник, где $n>3$, со стороной $AB=a$ и данной суммой внешних углов при вершинах, отличных от A и B, равной $120°$, имеет площадь, бо́льшую $\frac{a^2 \operatorname{tg}\frac{120°}{2}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, доказывается аналогично решению задачи а).



Черт. 90.

23. Пусть XYZ — какой-то треугольник, вписанный в данный многоугольник M (черт. 90, *а*). Если PP_1 есть сторона M, на которой лежит вершина X треугольника, то либо все треугольники PYZ, XYZ и P_1YZ имеют одинаковую площадь (так будет обстоять дело, если $PP_1 \| YZ$), либо хотя бы один из треугольников PYZ и P_1YZ имеет бо́льшую площадь, чем XYZ (а именно, тот, вершина которого более удалена от точки пересечения PP_1 и YZ, чем точка X). Таким образом, во всех случаях существует вписанный в M треугольник PYZ, вершина P которого совпадает с вершиной многоугольника M, а площадь не меньше площади XYZ. Точно так же показывается, что можно найти вписанный в M треугольник PQZ, вершина Q которого тоже совпадает с вершиной M, а площадь не меньше площади

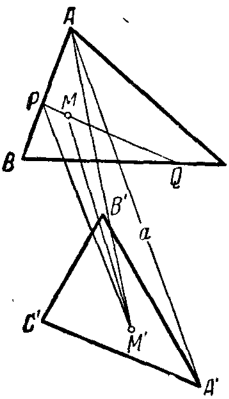
PYZ (черт. 90, *б*) и, наконец, вписанный в M треугольник PQR (черт. 90, *в*), все вершины которого совпадают с вершинами многоугольника, а площадь не меньше площади PQZ. Отсюда и следует утверждение задачи.



а) *б)*

Черт. 91.

Нетрудно видеть, что вписанных в M треугольников, имеющих одну и ту же площадь, бóльшую площади всех других вписанных треугольников, может быть несколько (так в случае, когда M есть правильный шестиугольник, таких треугольников будет два, см. черт. 91, *а*) или даже бесконечно много (черт. 91, *б*).



Черт. 92.

24. Пусть наибольшее из девяти расстояний между вершинами наших двух треугольников будет равно a и пусть M — произвольная точка треугольника ABC и M' — произвольная точка треугольника $A'B'C'$ (черт. 92). Докажем, что $MM' \leqslant a$. Проведем через M произвольную прямую, лежащую в плоскости треугольника ABC и пересекающую стороны этого треугольника в точках P и Q. Из углов $M'MP$ и $M'MQ$ по крайней мере один не меньше $90°$; пусть таким будет, например, угол $M'MP$. В таком случае из рассмотрения треугольника $M'MP$ сразу следует, что $M'P > M'M$. Далее пусть AB есть та сторона треугольника ABC, на которой лежит точка P. Хотя бы один из углов $M'PA$ и $M'PB$ не меньше

$90°$; пусть это будет, например, угол $M'PA$. В таком случае $M'A > M'P$ и, следовательно, $M'A > M'M$. Поступая теперь с точкой M' так же, как мы раньше поступали с точкой M, покажем, что $AM' \leqslant AA'$, где A' есть некоторая вершина треугольника $A'B'C'$. Но по условию $AA' \leqslant a$, откуда и следует справедливость нашего утверждения.

25. 1) Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то произведение $(\alpha - \beta)(a - b) \geqslant 0$ (оба сомножителя имеют один знак) и равно нулю только, если $\alpha = \beta$, $a = b$, т. е. если треугольник ABC равнобедренный. Отсюда следует, что

$$(\alpha - \beta)(a - b) + (\beta - \gamma)(b - c) + (\gamma - \alpha)(c - a) \geqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место только в том случае, если треугольник равносторонний. Преобразовывая это неравенство и принимая во внимание, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, получаем

$$(2\alpha - \beta - \gamma)a + (2\beta - \alpha - \gamma)b + (2\gamma - \alpha - \beta)c \geqslant 0,$$
$$(3\alpha - \pi)a + (3\beta - \pi)b + (3\gamma - \pi)c \geqslant 0,$$
$$3(\alpha a + \beta b + \gamma c) \geqslant \pi(a + b + c),$$
$$\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a + b + c} \geqslant \frac{\pi}{3},$$

где равенство имеет место только в случае равностороннего треугольника.

2) Так как сумма двух сторон треугольника больше третьей, то $\alpha(b + c - a) > 0$. Отсюда

$$\alpha(b + c - a) + \beta(a + c - b) + \gamma(a + b - c) > 0.$$

Преобразовывая это неравенство, имеем

$$a(\beta + \gamma - \alpha) + b(\alpha + \gamma - \beta) + c(\alpha + \beta - \gamma) > 0,$$
$$a(\pi - 2\alpha) + b(\pi - 2\beta) + c(\pi - 2\gamma) > 0,$$
$$\pi(a + b + c) > 2(\alpha a + \beta b + \gamma c),$$
$$\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что отношение $\frac{a\alpha+\beta b+\gamma c}{a+b+c}$ может быть сколь угодно близким к $\frac{\pi}{2}$. Действительно, пусть ABC есть равнобедренный треугольник с очень малым углом при вершине A (черт. 93). В таком случае a и α очень малы и

Черт. 93.

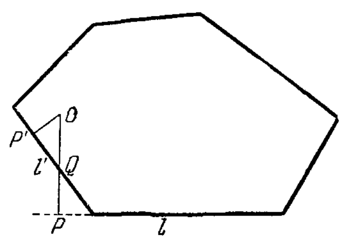
$$\frac{a\alpha+\beta b+\gamma c}{a+b+c}\approx\frac{\beta b+\gamma c}{b+c}=\frac{2\beta b}{2b}=\beta\approx\frac{\pi}{2}.$$

26. Докажем требуемое утверждение для случая многоугольника. Для многогранника доказательство совершенно аналогично.

Пусть O — данная точка выпуклого многоугольника U и l — сторона этого многоугольника, наименее удаленная от точки O (или одна из таких сторон, если их несколько). Тогда основание P перпендикуляра, опущенного из точки O на сторону l, лежит внутри l.

В самом деле, если бы точка P лежала на продолжении l, то отрезок OP пересекал бы некоторую другую сторону l' многоугольника U в точке Q (черт 94), и мы имели бы $OQ < OP$. Но тогда расстояние OP' от точки O до стороны l' было бы и подавно меньше, чем OP, что противоречит выбору стороны l.

Замечание. Доказанная теорема имеет интересное механическое доказательство, которое мы здесь приведем для случая многогранника. Изготовим из неоднородного материала тело в виде нашего многогранника U и расположим тяжелые массы внутри него так, чтобы центр тяжести тела совпал с O (нетрудно доказать, что это всегда возможно). Если бы все основания перпендикуляров, опущенных из O на плоскости граней, лежали вне соответствующих граней, то многогранник U, поставленный на некоторую грань, в силу известного закона механики тотчас же упал бы на другую грань (ибо проекция центра тяжести на плоскость опоры не лежала бы на основании многогранника). Центр тяжести многогранника



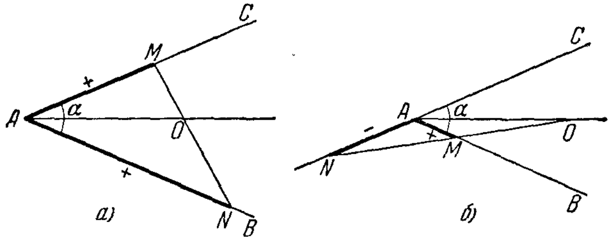
Черт. 94.

при этом, очевидно, понизился бы и, следовательно, его потенциальная энергия стала бы меньше. Поэтому мы смогли бы заставить многогранник при падении совершить некоторую полезную работу. Многогранник не смог бы лежать и на этой грани и стал бы падать на третью и т. д. Используя многогранник в качестве источника энергии, мы получили бы вечный двигатель, что невозможно.

27. а) Докажем прежде всего, что если через точку O, взятую на биссектрисе угла BAC, равного α, проведена прямая, пересекающая стороны угла в точках M и N, то

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{AO};$$

здесь отрезки AM и AN считаются положительными или отрицательными в зависимости от того, лежат ли точки M, соответственно N, на сторонах угла или на их продолжениях



Черт. 95.

(черт. 95, *а*, *б*). В зависимости от того, являются ли оба отрезка AM и AN положительными или AM положительно, а AN отрицательно, имеем

$$S_{\triangle OAN}+S_{\triangle OAM}=S_{\triangle MAN} \quad \text{или} \quad S_{\triangle OAN}-S_{\triangle OAM}=S_{\triangle MAN},$$

откуда

$$\frac{1}{2}AO\cdot AN\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}AO\cdot AM\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}AM\cdot AN\sin\alpha$$

или

$$\frac{1}{2}AO\cdot AN\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}AO\cdot AM\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}AM\cdot AN\sin\alpha$$

(здесь уже не учитываются знаки отрезков). Разделив обе части последнего равенства на $\frac{1}{2} AO \cdot AM \cdot AN \sin\frac{\alpha}{2}$, получаем

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{AO} \quad \text{или} \quad \frac{1}{AM}-\frac{1}{AN}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{AO},$$

что и требовалось доказать.

Теперь, учитывая, что центр правильного n-угольника лежит на пересечении биссектрис всех его углов, объединяя в рассматриваемой сумме обратных величин $2n$ отрезков попарно обратные величины отрезков с общей вершиной и применяя доказанное выше предложение, мы непосредственно получим, что интересующая нас сумма равна

$$n\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{R},$$

где R — радиус описанного круга правильного n-угольника, а α — его угол, т. е. действительно не зависит от выбора прямой l.

б) Докажем прежде всего, что если через точку O, взятую на оси правильного n-гранного угла с вершиной A, проведена плоскость π, пересекающая ребра угла в точках M_1, M_2, ..., M_n, то сумма

$$\frac{1}{AM_1}+\frac{1}{AM_2}+\ldots+\frac{1}{AM_n},$$

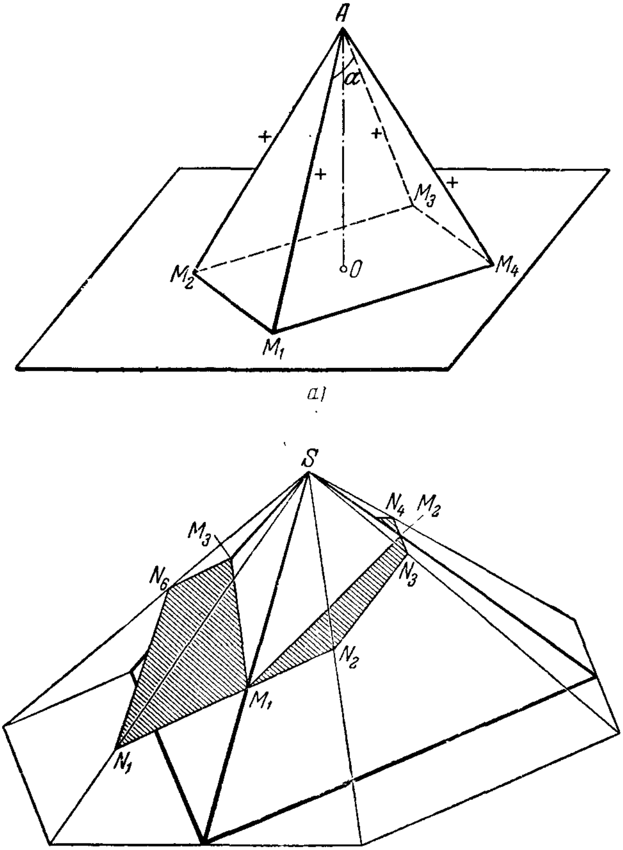
где отрезки AM_1, AM_2, ..., AM_n взяты с соответствующими знаками, не зависит от плоскости Π. Это предложение почти очевидно для многогранных углов с **четным** числом ребер. Действительно, например, в случае $n=4$ (черт. 96, *а*), имеем (см. решение задачи а):

$$\frac{1}{AM_1}+\frac{1}{AM_3}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}AO \quad \text{и} \quad \frac{1}{AM_2}+\frac{1}{AM_4}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}AO,$$

где $\alpha=M_1OM_3$; отсюда непосредственно следует

$$\frac{1}{AM_1}+\frac{1}{AM_2}+\frac{1}{AM_3}+\frac{1}{AM_4}=2\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}AO.$$

В случае **нечетного** n для доказательства опишем вокруг рассматриваемого правильного n-гранного угла правильный $2n$-гранный угол. Для этого опишем прежде всего вокруг нашего n-гранного угла конус и проведем касательные плоскости к этому конусу через ребра нашего угла и



Черт. 96.

образующие конуса, составляющие равные углы с двумя соседними ребрами угла (черт. 96, *б*). Пусть $N_1, N_2, \ldots$ $\ldots, N_{2n}$ — точки, в которых плоскость П пересекает ребра полученного $2n$-гранного угла. В таком случае по доказанному выше сумма

$$\frac{1}{AN_1}+\frac{1}{AN_2}+\ldots+\frac{1}{AN_{2n}}$$

не зависит от плоскости П. Но, с другой стороны,

$$\frac{1}{AN_1}+\frac{1}{AN_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{AM_1},\quad \frac{1}{AN_3}+\frac{1}{AN_4}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{AM_2},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \frac{1}{AN_{2n-1}}+\frac{1}{AN_{2n}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{AM_n},$$

где α — плоский угол $2n$-гранного угла. Отсюда вытекает, что и сумма

$$\frac{1}{AM_1}+\frac{1}{AM_2}+\ldots+\frac{1}{AM_n}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{AN_1}+\frac{1}{AN_2}+\ldots+\frac{1}{AN_{2n}}\right)$$

не зависит от плоскости П.

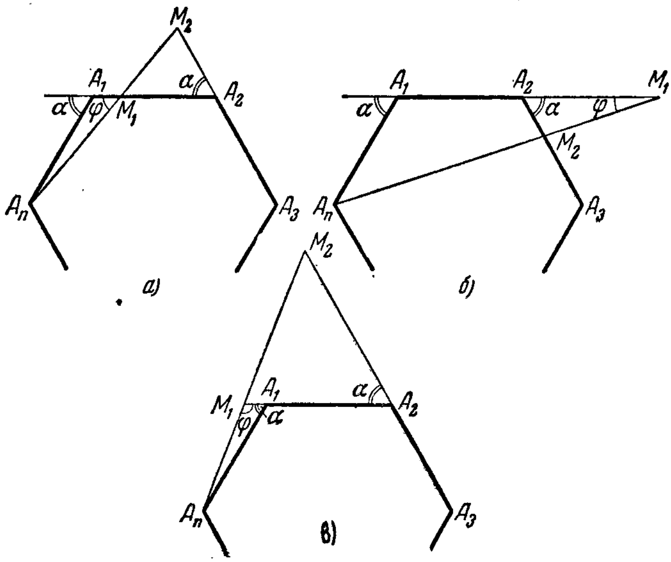
Заключительная часть решения задачи б) почти не отличается от окончания решения задачи а).

28. Пусть M_1 есть точка стороны A_1A_2 правильного n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, M_2 — точка стороны A_2A_3, в которую проектируется M_1 из вершины A_n (черт. 97). Обозначим внешний угол n-угольника $\left(\text{равный } \frac{360°}{n}\right)$ через α и положим $\angle A_1M_1A_n=\varphi$. Сторону данного многоугольника будем считать равной 1. Положение точек M_1 и M_2 будем определять отношениями $\frac{M_1A_1}{M_1A_2}=\lambda_1$, соответственно $\frac{M_2A_2}{M_2A_3}=\lambda_2$. При этом отношение λ_1 мы будем считать положительным, если направления отрезков M_1A_1 и M_1A_2 (от M_1 к A_1, соответственно от M_1 к A_2) совпадают (т. е. если точка M_1 расположена на продолжении стороны A_1A_2, а не на самой стороне); в противном случае будем считать, что λ_1 отрицательно. Аналогично этому определится и знак λ_2 [1]).

[1]) Относительно знаков отрезков см. также стр. 46—48.

Могут иметь место три разных случая.

1° λ_1 **отрицательно**, λ_2 **положительно** (черт.



Черт. 97.

97, *а*). Из треугольника $A_nA_1M_1$ по теореме синусов находим

$$M_1A_1 = \frac{M_1A_1}{A_nA_1} = \frac{\sin \angle A_1A_nM_1}{\sin \angle A_1M_1A_n} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi},$$

отсюда

$$M_1A_2 = 1 - M_1A_1 = \frac{\sin \varphi - \sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi};$$

$$\lambda_1 = -\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi - \sin(\alpha - \varphi)}.$$

Из треугольника $M_1A_2M_2$ получаем

$$\frac{M_2A_2}{M_1A_2} = \frac{\sin \varphi}{\sin(180^\circ - \alpha - \varphi)} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)};$$

$$M_2A_2 = \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} M_1A_2 = \frac{\sin \varphi - \sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Отсюда

$$M_2A_3 = 1 + M_2A_2 = \frac{\sin(\alpha+\varphi) + \sin\varphi - \sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)} =$$

$$= \frac{(2\cos\alpha + 1)\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}; \quad \lambda_2 = \frac{\sin\varphi - \sin(\alpha-\varphi)}{(2\cos\varphi + 1)\sin\varphi}.$$

Сравнивая выражения для λ_1 и λ_2, имеем

$$1 - \lambda_1 = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi - \sin(\alpha-\varphi)} = \frac{1}{2\cos\alpha + 1} \cdot \frac{1}{\lambda_2};$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\cos\alpha + 1} \cdot \frac{1}{1 - \lambda_1}. \tag{*}$$

2° λ_1 положительно, λ_2 отрицательно (черт. 97, *б*). Из треугольника $A_nA_1M_1$ имеем

$$M_1A_1 = \frac{M_1A_1}{A_nA_1} = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi};$$

$$M_1A_2 = M_1A_1 - 1 = \frac{\sin(\alpha-\varphi) - \sin\varphi}{\sin\varphi};$$

$$\lambda_1 = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi) - \sin\varphi}.$$

Из треугольника $M_1A_2M_2$ получаем

$$\frac{M_2A_2}{M_1A_2} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - \alpha - \varphi)} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)};$$

$$M_2A_2 = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} M_1A_2 = \frac{\sin(\alpha-\varphi) - \sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

и, следовательно,

$$M_2A_3 = 1 - M_2A_2 = \frac{\sin(\alpha+\varphi) - \sin(\alpha-\varphi) + \sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} =$$

$$= \frac{(2\cos\alpha + 1)\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)}; \quad \lambda_2 = -\frac{\sin(\alpha-\varphi) - \sin\varphi}{(2\cos\alpha + 1)\sin\varphi}.$$

Таким образом, и в этом случае для λ_1 и λ_2 получаются в точности те же выражения, что и выше; следовательно, λ_2 и λ_1 попрежнему связаны соотношением (*).

3° λ_1 и λ_2 положительны (черт. 97, *в*). Из треугольника $A_nA_1M_1$ находим

$$M_1A_1 = \frac{M_1A_1}{A_nA_1} = \frac{\sin(180^\circ - \varphi - \alpha)}{\sin\varphi} = \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi},$$

$$M_1A_2 = 1 + M_1A_1 = \frac{\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi};$$

$$\lambda_1 = \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha)}.$$

Из треугольника $M_1A_2M_2$ получаем

$$\frac{M_2A_2}{M_1A_2} = \frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{\sin(\varphi-\alpha)} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\alpha)};$$

$$M_2A_2 = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\alpha)} M_1A_2 = \frac{\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi-\alpha)}$$

и, следовательно,

$$M_2A_3 = 1 + M_2A_2 = \frac{\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \sin(\varphi-\alpha)}{\sin(\varphi-\alpha)} =$$

$$= \frac{(2\cos\alpha + 1)\sin\varphi}{\sin(\varphi-\alpha)}; \quad \lambda_2 = \frac{\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha)}{(2\cos\alpha+1)\sin\varphi}.$$

Сравнивая выражения для λ_1 и λ_2, находим

$$1 - \lambda_1 = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha)} = \frac{1}{2\cos\alpha+1} \cdot \frac{1}{\lambda_2};$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\cos\alpha+1} \cdot \frac{1}{1-\lambda_1},$$

т. е. прежние соотношения (*).

Теперь мы можем перейти к решению задач а), б) и в).

а) $n=4$, $\alpha=90^\circ$, $\cos\alpha=0$. Соотношения (*) дают

$$\lambda_2 = \frac{1}{1-\lambda_1}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{1-\lambda_2} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\lambda_1}} = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} = 1 - \frac{1}{\lambda_1},$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{1-\lambda_3} = \frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{\lambda_1}\right)} = \lambda_1, \quad \lambda_5 = \frac{1}{1-\lambda_4} = \frac{1}{1-\lambda_1}$$

и далее

$$\lambda_9 = \frac{1}{1-\lambda_5} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}, \quad \lambda_{13} = \frac{1}{1-\lambda_9} = \lambda_1,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. В качестве попутного результата мы получили соотношение $\lambda_4 = \lambda_1$: точка M_4 делит сторону A_4A_1 точно в таком же отношении, как точка M_1 сторону A_1A_2.

б) $n=6$, $\alpha=60^\circ$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Соотношения (*) дают

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\lambda_1}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\lambda_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\lambda_1}} = \frac{1-\lambda_1}{1-2\lambda_1},$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\lambda_3} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1-\lambda_1}{1-2\lambda_1}} = \frac{2\lambda_1-1}{2\lambda_1} = 1-\frac{1}{2\lambda_1},$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\lambda_4} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{2\lambda_1}\right)} = \lambda_1,$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\lambda_5} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\lambda_1}, \quad \lambda_7 = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\lambda_6} = \frac{1-\lambda_1}{1-2\lambda_1}.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_{13} = \frac{1-\lambda_7}{1-2\lambda_7} = \frac{1-\frac{1-\lambda_1}{1-2\lambda_1}}{1-2\frac{1-\lambda_1}{1-2\lambda_1}} = \lambda_1,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. В качестве попутного результата мы получили соотношение $\lambda_5 = \lambda_1$: точка M_5 делит сторону A_5A_6 в таком же отношении, как точка M_1 сторону A_1A_2.

в) $n=10$, $\alpha=36^\circ$, $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Соотношения (*) дают

$$\lambda_2 = \frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\lambda_1},$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\lambda_2} =$$

$$= \frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3+\sqrt{5}}\frac{1}{1-\lambda_1}} = \frac{2(1-\lambda_1)}{(1+\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})\lambda_1},$$

$$\lambda_4=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\lambda_3}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2(1-\lambda_1)}{(1+\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})\lambda_1}}=$$
$$=\frac{2\left[(1+\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})\lambda_1\right]}{(3+\sqrt{5})\left[(-1+\sqrt{5})-(1+\sqrt{5})\lambda_1\right]},$$

$$\lambda_5=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\lambda_4}=$$
$$=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2\left[(1+\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})\lambda_1\right]}{(3+\sqrt{5})\left[(-1+\sqrt{5})-(1+\sqrt{5})\lambda_1\right]}}=$$
$$=\frac{(-1+\sqrt{5})-(1+\sqrt{5})\lambda_1}{-(1-\sqrt{5})\lambda_1}=1-\frac{-1+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})\lambda_1},$$

$$\lambda_6=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{3+\lambda_5}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})\lambda_1}\right)}=$$
$$=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{(1+\sqrt{5})\lambda_1}{-1+\sqrt{5}}=\lambda_1,$$

$$\lambda_7=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\lambda_6}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\lambda_1},$$
$$\lambda_8=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\lambda_7}=\frac{2(1-\lambda_1)}{(1+\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})\lambda_1},$$
$$\lambda_9=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\lambda_8}=\frac{2\left[(1+\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})\lambda_1\right]}{(3+\sqrt{5})\left[(-1+\sqrt{5})-(1+\sqrt{5})\lambda_1\right]},$$
$$\lambda_{10}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\lambda_9}=1-\frac{-1+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})\lambda_1}$$

и, наконец,

$$\lambda_{11}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\lambda_{10}}=\lambda_1,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. В качестве попутного результата мы получили соотношение $\lambda_6=\lambda_1$: точка M_6 делит сторону A_6A_2 в таком же отношении, в каком точка M_1 делит сторону A_1A_2. Отсюда, в частности, следует, что прямая M_1M_6 (так же как и прямые M_2M_7, M_3M_8 и т. д.) проходит через центр десятиугольника.

Примечание к решению задач 28 а), б), в). В решении всех задач можно прекратить вычисления в тот момент, когда обнаружится, что какое-то отношение λ_k (k — целое положительное число) равно λ_1. Соотношение $\lambda_k = \lambda_1$ показывает, что отношения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots$ меняются периодически (с периодом $k-1$). Так, например, из того, что в случае а) мы имели $\lambda_4 = \lambda_1$, вытекает

$$\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_7 = \lambda_{10} = \lambda_{13} = \lambda_{16} = \ldots, \quad \lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_8 = \lambda_{11} = \ldots,$$
$$\lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_9 = \lambda_{12} = \ldots$$

Таким образом, у нас будут всего три различных отношения λ_1, λ_2 и λ_3. Нетрудно видеть, что описанный в условии задачи процесс определит на каждой стороне квадрата три точки, которые делят эту сторону в отношениях λ_1, λ_2 и λ_3.

Точно так же в случае б) мы имеем

$$\lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_9 = \lambda_{13} = \ldots, \quad \lambda_2 = \lambda_6 = \lambda_{10} = \lambda_{14} = \ldots,$$
$$\lambda_3 = \lambda_7 = \lambda_{11} = \lambda_{15} = \ldots, \quad \lambda_4 = \lambda_8 = \lambda_{12} = \lambda_{16} = \ldots$$

Здесь на каждой стороне шестиугольника мы получим всего две точки, делящие эту сторону в отношениях λ_1 и λ_3 или λ_2 и λ_6.

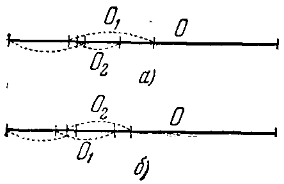
Наконец, в случае в) мы имеем

$$\lambda_1 = \lambda_6 = \lambda_{11} = \lambda_{16} = \ldots, \quad \lambda_2 = \lambda_7 = \lambda_{12} = \lambda_{17} = \ldots,$$
$$\lambda_3 = \lambda_8 = \lambda_{13} = \lambda_{18} = \ldots, \quad \lambda_4 = \lambda_9 = \lambda_{14} = \lambda_{19} = \ldots,$$
$$\lambda_5 = \lambda_{10} = \lambda_{15} = \lambda_{20} = \ldots$$

Здесь на каждой стороне десятиугольника будет единственная точка; точки на противоположных сторонах будут делить стороны в одинаковых отношениях.

29. Прежде всего исключим из рассмотрения все те отрезки покрытия, которые сами целиком покрываются одним или несколькими из этих отрезков. После этого занумеруем все оставшиеся отрезки в определенном порядке следующим образом. Будем считать, что наш исходный отрезок O длины единица расположен горизонтально. Назовем первым тот из оставшихся отрезков покрытия, который покрывает левый конец отрезка O; отметим, что такой отрезок может быть только один, так как если бы их было два, то больший из них должен был бы целиком покрывать меньший, а все отрезки покрытия, целиком содержащиеся в других отрезках, мы исключили. Далее назовем вторым тот из отрезков покрытия, который содержит правый конец первого отрезка. Покажем, что такой отрезок может быть тоже только один. Действительно, предположим, что таких отрезков два: O_1 и O_2; при этом пусть левый конец O_1 расположен левее левого конца O_2.

При этом если правый конец O_1 расположен правее правого конца O_2 (черт. 98, *а*), то отрезок O_2 целиком содержится внутри O_1 и поэтому должен был быть нами раньше исключен из рассмотрения; если правый конец O_1 расположен левее правого конца O_2 (черт. 98, *б*), то отрезок O_1 целиком покрывается отрезком O_2 и первым отрезком и поэтому он должен быть исключен из рассмотрения.



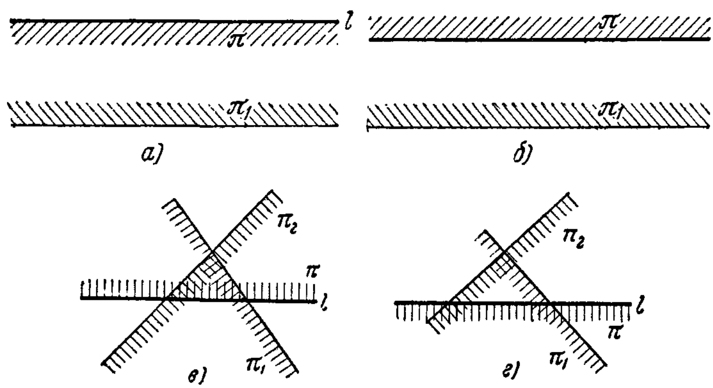
Черт. 98.

Точно так же существует единственный отрезок, покрывающий правый конец второго отрезка; назовем этот отрезок третьим и т. д. Отметим при этом, что никакие два отрезка, имеющие оба четные или оба нечетные номера, не пересекаются: в самом деле, если бы, например, первый и третий отрезки пересекались, то они покрывали бы целиком второй отрезок, чего, по предположению, не может быть. Далее общая длина всех оставшихся отрезков покрытия заведомо не меньше 1 (длины отрезка O). Отсюда следует, что или общая длина всех «нечетных» отрезков не меньше $^1/_2$, или общая длина всех «четных» отрезков не меньше $^1/_2$. А это и показывает, что существуют непересекающиеся отрезки покрытия, общая длина которых не меньше $^1/_2$.

30. Будем вести доказательство методом математической индукции. Для случая, когда общее число полуплоскостей равно трем, теорема очевидна. Предположим теперь, что мы уже доказали теорему в том случае, когда общее число полуплоскостей равно n; докажем, что в таком случае и для $n+1$ полуплоскостей теорема остается справедливой.

Пусть π есть какая-нибудь одна из наших $n+1$ полуплоскостей. Из того, что все полуплоскости в совокупности покрывают всю плоскость, следует, что n полуплоскостей без π полностью покрывают прямую l, являющуюся границей полуплоскости π. При этом возможны два случая.

1° Некоторая полуплоскость π_1 целиком покрывает прямую l. Это возможно только в том случае, если граница полуплоскости π_1 параллельна l. При этом если полуплоскости π и π_1 расположены по разные стороны от своих границ (черт. 99, *а*), то уже две полуплоскости π и π_1 (т. е. даже меньше трех) целиком покрывают всю плоскость. Если же полуплоскость π_1 расположена с той же стороны от границы, что и полуплоскость π (черт. 99, *б*), то полуплоскость π целиком заключается в полуплоскости π_1. В таком случае уже n из наших $n+1$ полуплоскостей (исключая π) целиком покрывают всю плоскость. Но, по предположению индукции, из этих n полуплоскостей можно выбрать три, целиком покрывающие всю плоскость.



Черт. 99.

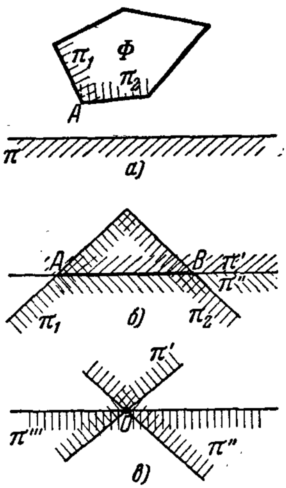
2° Не существует полуплоскости, которая целиком покрывала бы прямую l. В этом случае прямая l целиком покрывается полуплоскостями, которые высекают на этой прямой n лучей. Будем считать прямую l горизонтальной. Все эти лучи можно разделить на две группы: «левые» лучи (т. е. лучи, направленные влево по прямой l) и «правые» лучи. При этом все «левые» лучи содержатся в одном из них, а именно в том луче l_1, начало которого расположено правее, чем начала всех остальных «левых» лучей; точно так же и все «правые» лучи содержатся в одном луче l_2 (начало которого расположено левее начал всех остальных «правых» лучей). То, что прямая l полностью покрывается всей совокупностью лучей, означает, что эта прямая покрывается двумя лучами l_1 и l_2.

Пусть теперь π_1 и π_2 — две полуплоскости, высекающие на прямой l лучи l_1 и l_2. Эти полуплоскости могут быть рас-

положены так, как это изображено на черт. 99, *в* или 99, *г*. В первом случае вся плоскость полностью покрывается тремя полуплоскостями π_1, π_2 и π. Во втором случае полуплоскость π полностью покрывается полуплоскостями π_1 и π_2. Следовательно, уже n из наших полуплоскостей (исключая π) полностью покрывают всю плоскость. Но в таком случае, в силу предположения индукции, плоскость покрывают уже некоторые три из этих n полуплоскостей.

Таким образом, во всех случаях можно выбрать три полуплоскости, покрывающие всю плоскость.

31. а) Будем вести доказательство методом математической индукции. Пусть мы уже доказали, что k из наших полуплоскостей имеют общую точку; покажем, что в таком случае и $(k+1)$-я полуплоскость π пересекает общую часть Φ первых k полуплоскостей, другими словами, что и $k+1$ полуплоскостей имеют общую точку.



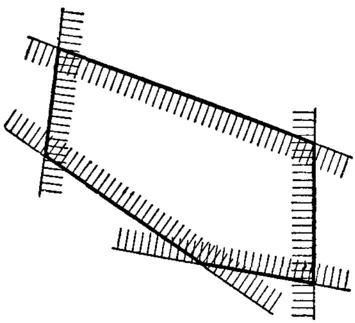
Черт. 100.

Пересечение Φ ряда полуплоскостей может представлять собой, очевидно, либо выпуклый многоугольник (может быть, неограниченный), либо отрезок (или луч, или всю прямую), либо точку. Рассмотрим в отдельности все эти случаи.

1° Φ есть выпуклый многоугольник (черт. 100, *а*). Предположим, что π не пересекает этого многоугольника. Пусть A есть вершина многоугольника Φ, наиболее близкая к полуплоскости π (или одна из таких вершин, если их несколько). Стороны многоугольника Φ, сходящиеся в вершине A, являются границами двух из наших полуплоскостей π_1 и π_2. Тогда, как видно из черт. 100, *а*, полуплоскости π_1, π_2 и π не имеют общей точки, что противоречит условию задачи. Таким образом, π обязательно пересекает Φ, что и требовалось доказать.

2° Пусть Ф есть отрезок AB прямой l (черт. 100, *б*). В таком случае среди первых k полуплоскостей есть две — π' и π'', ограниченные прямой l и направленные в разные стороны от этой прямой, кроме того среди них есть полуплоскость π_1, пересекающая прямую l в точке A и содержащая точку B, и полуплоскость π_2, пересекающая прямую l в точке B и содержащая точку A. Из того, что полуплоскости π', π'' и π имеют общую точку, следует, что π пересекает прямую l. Теперь, если бы полуплоскость π пересекала l по лучу, расположенному вне отрезка AB за точкой A, то, как нетрудно убедиться, либо три полуплоскости π, π_1 и π' не имели бы общей точки, либо три полуплоскости π, π_1 и π'' не имели бы общей точки. Точно так же доказывается, что π не может пересекать l по лучу, расположенному вне отрезка AB за точкой B. Следовательно, π пересекает AB, что и требовалось доказать. Аналогично проводится доказательство и в тех случаях, когда Ф есть луч или вся прямая.

3° Пусть Ф есть точка O. В таком случае среди первых k полуплоскостей есть три полуплоскости π', π'' и π''', пересекающиеся в точке O и расположенные так, как изображено на черт. 100, *в*. Нетрудно показать, что если бы полуплоскость π не содержала бы точки O, то какие-нибудь три полуплоскости π, π' и π'', π, π' и π''' или π, π'' и π''' не имели бы общей точки.



Черт. 101.

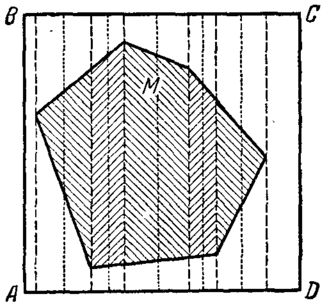
Из доказанного выводится утверждение задачи при помощи обычного рассуждения «по индукции».

б) Пусть имеется n выпуклых многоугольников $Ф_1$, $Ф_2$, ..., $Ф_n$, каждые три из которых имеют общую точку. Продолжим все стороны каждого из этих многоугольников и рассмотрим определяемые этими сторонами полуплоскости, внутри которых лежат многоугольники. Нетрудно видеть, что каждый выпуклый многоугольник представляет собой пересечение всех полуплоскостей, определяемых его сторонами (черт. 101).

Покажем теперь, что каждые три из полуплоскостей, определяемых всеми сторонами всех наших многоугольников, пересекаются между собой. Действительно, если эти три полуплоскости порождаются тремя разными многоугольниками, то общая часть полуплоскостей содержит общую часть этих трех многоугольников, существующую по условию задачи. Если же три полуплоскости порождаются двумя многоугольниками (две из полуплоскостей ограничены сторонами одного и того же многоугольника) или одним многоугольником, то общая часть этих полуплоскостей тем более существует (в первом случае общая часть полуплоскостей содержит пересечение двух рассматриваемых многоугольников, а во втором — целый многоугольник).

В силу результата задачи а) отсюда следует, что все наши полуплоскости имеют хотя одну общую точку, которая, очевидно, будет принадлежать всем n многоугольникам. Этим и завершается доказательство теоремы.

32. а) Проведем через все вершины многоугольника M прямые, параллельные какой-либо стороне AB квадрата. Тогда многоугольник разобьется на ряд треугольников и трапеций (черт. 102). Площадь каждого из этих треугольников и трапеций равна длине средней линии, умноженной на высоту. Если бы все средние линии были не больше $^1/_2$, то площадь каждого треугольника или трапеции была бы не больше половины высоты и, следовательно, площадь всего многоугольника M была бы не больше половины суммы всех высот рассматриваемых треугольников и трапеций, т. е. не больше $^1/_2$ (так как сумма всех высот не больше $AD=1$), что противоречит условию.

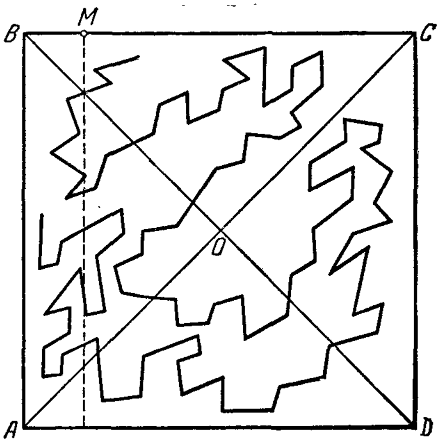


Черт. 102.

Таким образом, средняя линия какого-нибудь из треугольников или трапеций должна быть больше половины.

Прямая, на которой лежит эта средняя линия, и будет искомой.

б) Пусть O есть центр квадрата $ABCD$ (черт. 103). Рассмотрим отдельно все звенья ломаной, имеющие направления лучей, расположенных внутри угла AOB, и все звенья ломаной, имеющие направления лучей, расположенных внутри угла BOC (звенья ломаной, имеющие направления OB, причисляются к обеим этим совокупностям звеньев). Хотя бы одна из двух рассматриваемых совокупностей звеньев будет иметь общую длину, не меньшую 500; пусть для определенности это будет совокупность звеньев, имеющих направления лучей, расположенных внутри угла AOB.



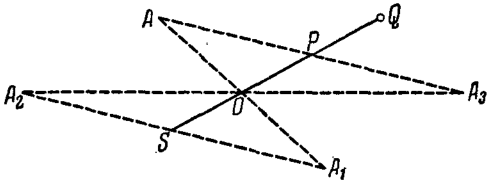
Черт. 103.

Спроектируем все звенья нашей совокупности на сторону BC квадрата. Так как каждое из звеньев рассматриваемой совокупности образует со стороной BC острый угол, меньший 45°, то проекции каждого звена не меньше чем длина звена, умноженная на $\cos 45° = {}^1/_2\sqrt{2}$. Следовательно, сумма длин всех проекций звеньев на сторону BC не короче, чем $500 \cdot {}^1/_2\sqrt{2} \approx 353{,}5$. А так как длина стороны BC равна 1, то на этой стороне должны найтись участки, на которые падают проекции больше чем 353 различных звеньев ломаной.

Пусть M есть точка стороны BC квадрата, принадлежащая проекциям 354 (или больше) различных звеньев ломаной. В таком случае прямая l, параллельная стороне AB квадрата и проходящая через точку M, пересекает исходную ломаную не меньше чем в 354 точках, т. е. заведомо больше, чем в 350 точках. Этим и завершается доказательство.

33. Допустим, что фигура имеет два центра симметрии S и O. Отразим точку S симметрично относительно O (черт. 104).

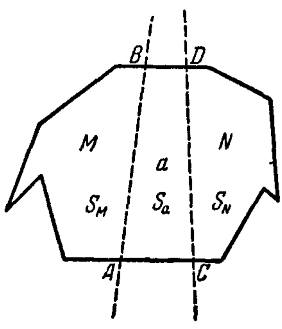
Докажем, что полученная точка P также будет центром симметрии. Пусть A — произвольная точка фигуры. Тогда точка A_1, симметричная A относительно O, также принадлежит фигуре, так как O — центр симметрии. Также принадлежат фигуре



Черт. 104.

точка A_2, симметричная A_1 относительно S, и точка A_3, симметричная A_2 относительно O. Отрезок AP равен и параллелен SA_1, а следовательно, и A_2S. Но и PA_3 равно и параллельно A_2S. Следовательно, $AP = PA_3$ и точки A, A_3, P лежат на одной прямой, т. е. точка A_3 симметрична A относительно P. Таким образом, точка A_3, симметричная произвольной точке A фигуры относительно P, сама принадлежит фигуре. Следовательно, P — центр симметрии.

Отразив теперь точку O относительно точки P, мы можем таким же образом построить еще один центр симметрии Q и т. д. Следовательно, если фигура имеет два центра симметрии, то она имеет их бесконечно много. Поэтому более одного, но конечное число центров симметрии фигура иметь не может.



Черт. 105.

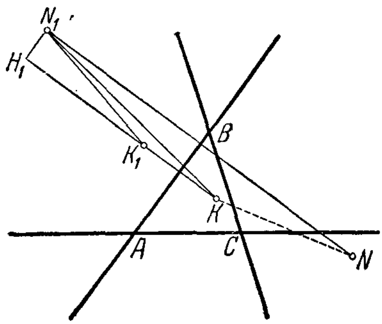
34. Прежде всего ясно, что любые две оси симметрии пересекаются внутри многоугольника. Действительно, допустим, что это не так. Пусть AB и CD — две оси симметрии нашего многоугольника (черт. 105). Площади симметричных частей должны быть равны, следовательно,

$$S_N = S_M + S_a \quad \text{и} \quad S_M = S_N + S_a.$$

Получилось, с одной стороны, $S_N > S_M$, а с другой стороны, $S_M > S_N$, чего быть не может.

Итак, любые две оси симметрии пересекаются внутри многоугольника. Покажем, что третья ось симметрии пройдет через точку пересечения первых двух.

Для доказательства предположим противное. Тогда три наши оси симметрии образуют некоторый треугольник ABC (черт. 106). Выберем внутри треугольника ABC произвольную внутреннюю точку K. Нетрудно проверить, что любая точка N плоскости лежит по ту же сторону, что и K, хотя бы от одной из осей симметрии. Соединим точку K с **наиболее удаленной** от нее точкой N нашего многоугольника. Пусть K и N лежат по одну сторону оси AB. Точка N_1, симметричная N относительно AB, очевидно, тоже принадлежит многоугольнику. Легко видеть, что $N_1K > N_1K_1$, где K_1 — точка, симметричная K относительно AB. В самом деле, $KK_1 \perp AB$. Поэтому точка H_1 — основание перпендикуляра, опущенного из N_1 на прямую KK_1,— лежит с той стороны оси AB, что и N_1 и K_1, поэтому проекция N_1K_1 на прямую KK_1 меньше проекции N_1K, откуда сразу и следует требуемое неравенство. Но в силу симметрии $N_1K_1 = NK$; таким образом, $NK < N_1K$, что противоречит тому, что N — самая далекая от K точка многоугольника. Полученное противоречие и доказывает теорему.



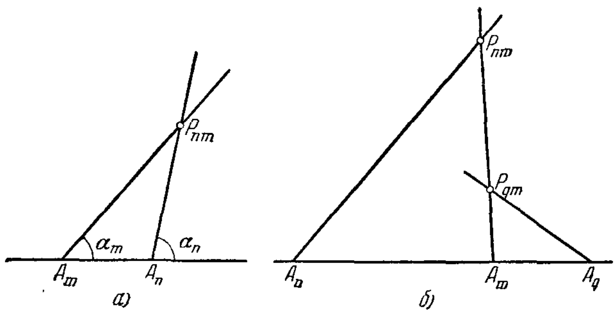
Черт. 106.

Примечание 1. Очевидно, указанное решение справедливо для любых плоских ограниченных фигур. Для неограниченных фигур утверждение задачи неверно. Так, полоса между двумя параллельными прямыми имеет бесконечно много параллельных осей симметрии (и еще одну ось, пересекающую все параллельные).

Примечание 2. **Решение, опирающееся на законы механики.** Вырежем нашу фигуру из картона. Тогда его центр тяжести лежит на оси симметрии (так как равнодействующая сил тяжести, действующих на равные и симметричные массы, приложена к некоторой точке оси симметрии). Если многоугольник имеет несколько осей симметрии, то все эти оси проходят через центр тяжести, т. е. пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

35. Обозначим дорогу, выходящую из пункта A_n, через a_n; угол, который образует эта дорога с прямой MN, через α_n (углы α_n заданы таблицей) и перекресток дорог a_n и a_m через P_{nm}. Условимся называть коротко машину, идущую по a_n, машиной a_n. Тогда

1° Если машина a_m задерживается на перекрестке P_{nm}, то угол α_n ближе к 90°, чем угол α_m (дорога a_n идет круче, чем a_m; черт. 107, *а*).



Черт. 107.

2° Пусть $p < q$. Дороги a_p и a_q пересекаются, если $\alpha_p < \alpha_q$, и не пересекаются, если $\alpha_p \geqslant \alpha_q$.

3° Если все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем a_n, то машина a_n проедет все перекрестки.

Это следует из 1°.

4° Пусть a_m — самая крутая из всех дорог, пересекающих дорогу a_n. Если a_m круче, чем a_n, то машина a_m не может быть задержана раньше точки P_{nm}.

В самом деле, предположим, что машина a_m задерживается на перекрестке P_{qm}, лежащем на отрезке A_mP_{mn}. Тогда согласно 1° дорога a_q круче, чем a_m, и значит, по условию не может пересекать a_n. Покажем, что это невозможно. Рассмотрим два случая:

А. Точка A_q лежит вне отрезка A_nA_m (черт. 107, *б*). Поскольку A_q пересекает сторону A_mP_{nm} треугольника $A_nP_{nm}A_m$

и не пересекает стороны A_nA_m, то эта дорога должна пересечь A_nP_{nm}. Следовательно, этот случай невозможен.

Б. Точка A_q лежит внутри отрезка A_nA_m. Предположим сначала, что $n<q<m$. Из того, что пары дорог a_n и a_m, a_q и a_m пересекаются, а пара дорог a_n и a_q не пересекается, следует согласно 2°, что $\alpha_q \leqslant \alpha_n < \alpha_m$. Поскольку α_m ближе к 90°, чем α_n, неравенство $\alpha_n < \alpha_m$ возможно лишь при $\alpha_n < 90°$. Но тогда из неравенства $\alpha_q \leqslant \alpha_n$ следует, что a_q не более крута, чем a_n, что противоречит условию. Аналогично рассматривается случай $m<q<n$.

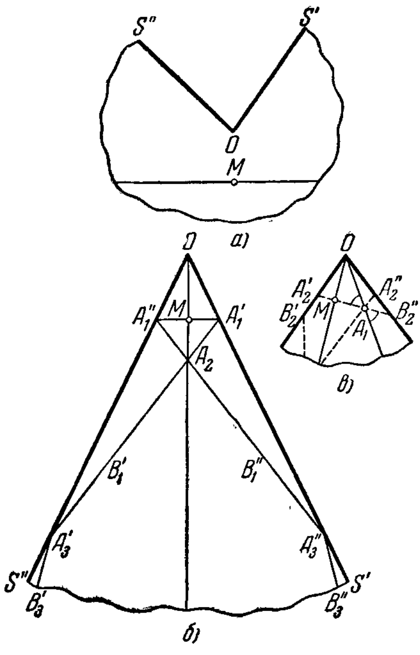
5° Из пунктов 4° и 1° следует, что если машина a_n проходит все перекрестки, то все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем a_n (предположение, обратное 3°).

Из пунктов 3° и 5° сразу можно получить полное решение задачи. Прежде всего сразу ясно, что машина, идущая по самой крутой из всех 30 дорог, а именно четырнадцатой, не будет нигде задержана. Далее будут задержаны все машины, путь которых пересекается с четырнадцатой дорогой, а именно 1-я, 2-я, 3-я, 4-я, 6-я, 7-я, 8-я, 10-я, 12-я, 13-я, 18-я, 19-я, 22-я, 27-я, 28-я, 30-я. Из первых 13 машин остаются лишь 5-я, 9-я, и 11-я. Но все эти три дороги пересекаются с первой дорогой, которая более крута, чем все они; следовательно, машины, идущие по этим путям, тоже будут задержаны. Из машин с 16-й по 30-ю по наиболее крутой дороге идет 19-я машина. Все дороги от 15-й до 18-й пересекаются с одной из двух пересекающихся дорог 14-й и 19-й; так как все они менее круты, чем эти две, то все машины, идущие по этим дорогам, будут задержаны. Из дорог от 20-й до 30-й наиболее круто идет 23-я дорога. Дороги 20-я и 21-я пересекаются с 23-й, следовательно, эти две машины будут также задержаны. Далее из дорог с 24-й по 30-ю самая крутая 24-я. Из дорог с 25-й по 30-ю самая крутая 30-я, которая пересекается менее крутыми дорогами 25-й, 26-й и 29-й. Так как 30-я дорога тоже пересекается с 14-й, то кроме 14-й дороги лишь 23-я и 24-я не пересекаются с более крутыми дорогами.

Итак, не будут нигде задержаны лишь 14-я, 23-я и 24-я машины.

Все приведенные рассуждения не зависят от расстояний между последовательными точками A_1, A_2, ..., A_{80}.

36. Разрежем конус по образующей, противоположной той, на которой лежит рассматриваемая точка, так, что эта образующая явится осью симметрии развертки. Отметим прежде всего, что в случае $\alpha \geqslant 180°$ кривая, очевидно, не может иметь самопересечений (это становится совершенно ясным при рассмотрении развертки конуса; черт. 108, *а*). Таким образом, нам осталось только рассмотреть случай, когда $\alpha < 180°$.



Черт. 108.

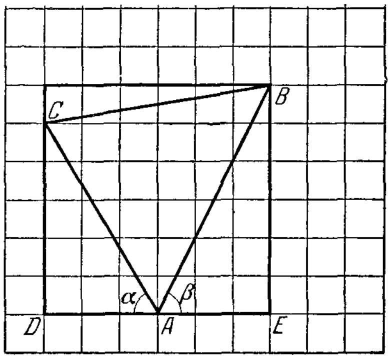
На развертке наша линия изобразится рядом отрезков прямых (черт. 108, *б*); первый из этих отрезков проходит через заданную точку M и перпендикулярен в этой точке к образующей OM — оси симметрии развертки. Пусть A_1' и A_1'' — точки пересечения этого отрезка с краями OS' и OS'' развертки. Точки A_1' и A_1'' изображают одну и ту же точку конуса, поскольку они лежат на одной образующей (изображаемой на развертке двумя прямыми OS' и OS'') на равном расстоянии от вершины O конуса. Эта точка A_2 будет первой точкой самопересечения рассматриваемой линии (в ней сходятся две ветви линии, изображаемые на развертке отрезками MA_1' и MA_1'').

Продолжение линии MA_1' за точку A_1' изображается на развертке некоторым отрезком $A_1''B_1''$, проходящим через точку A_1''. При этом, так как $\angle MA_1'O$ и $\angle B_1''A_1''S''$ на другой развертке, на которой образующая OS' не изображается двумя прямыми, представляют собой вертикальные углы (черт. 108, *в*), то $\angle MA'_1O=\angle B''_1A''_1S''$ и, следовательно, $\angle B''_1A''_1S''= =\angle MA''_1O$. Точно так же продолжение линии MA''_1 за точку A''_1 изображается на развертке отрезком $A'_1B'_1$ таким, что $\angle B'_1A'_1S'=\angle MA'_1O$. Если $\angle B'_1A'_1S'_1=\angle B''_1A''_1S''\leqslant\frac{\alpha}{2}$, то прямые $A'_1B'_1$ и $A''_1B''_1$ направлены в разные стороны от OM и не пересекаются внутри развертки; следовательно, в этом случае наша линия имеет единственную точку самопересечения. Если $\angle B'_1A'_1S'>\frac{\alpha}{2}$, но $\angle B'_1A'_1S'=\angle B''_1A''_1S''\leqslant\alpha$, то прямые $A'_1B'_1$ и $A''_1B''_1$ пересекаются между собой в некоторой точке A_2, но не встречают образующих OS'', соответственно OS'; в этом случае наша линия имеет две точки самопересечения. Если же $B'_1A'_1S'>\alpha$, то прямые $A'_1B'_1$ и $A''_1B''_1$ пересекают OS'', соответственно OS' в точках A'_3 и A''_3. Точки A''_3 и A'_3 изображают одну и ту же точку конуса; это будет третья точка самопересечения нашей линии. Продолжением линии $A'_1A'_3$ за точку A'_3 на развертке будет служить отрезок $A''_3B''_3$, образующий с OS' угол $\angle B''_3A''_3S'=\angle A''_1A''_3O$; продолжением $A''_1A''_3$ за точку A''_3 будет служить отрезок $A'_3B'_3$, образующий с OS'' угол $\angle B'_3A'_3S''=\angle A'_1A'_3O$. Далее, в точности, как выше, мы можем заключить, что если $\angle B''_3A''_3S'\leqslant \leqslant\frac{\alpha}{2}$, то наша линия имеет только три точки самопересечения A_1, A_2 и A_3; если $\angle B''_3A''_3S'>\frac{\alpha}{2}$, то существует еще одна точка самопересечения A_4 — точка пересечения прямых $A''_3B''_3$ и $A'_3B'_3$, а если $\angle B''_3A''_3S''>\alpha$, то существует кроме того еще одна точка A_5 — эта точка изображается на развертке двумя точками A'_5 и A''_5 пересечения прямых $A''_3B''_3$ и $A'_3B'_3$ с OS', соответственно OS''. Дальше рассуждения ведутся аналогично.

Отметим теперь, что $\angle B'_1A'_1S'=\angle MA'_1O=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$;

$\angle B''_3A''_3S'=\angle A'_1A''_3O=\angle B''_1A''_1S''-\angle A''_1OA'_1=\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-$

$-\alpha = 90° - 3\frac{\alpha}{2}$ и т. д. Таким образом, мы видим, что если $0 \leqslant 90° - \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\alpha}{2}$, т. е. $90° \leqslant 2\frac{\alpha}{2}$, то линия имеет единственную точку самопересечения; если $\frac{\alpha}{2} < 90° - \frac{\alpha}{2} \leqslant \alpha$, т. е. $2\frac{\alpha}{2} < 90° \leqslant 3\frac{\alpha}{2}$, то линия имеет две точки самопересечения; если $90° - \frac{\alpha}{2} < \alpha$, но $90° - 3\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\alpha}{2}$, т. е. $3\frac{\alpha}{2} < 90° \leqslant 4\frac{\alpha}{2}$, линия имеет три точки самопересечения; если $\frac{\alpha}{2} < 90° - 3\frac{\alpha}{2} \leqslant \alpha$, т. е. $4\frac{\alpha}{2} < 90° < 5\frac{\alpha}{2}$, то линия имеет четыре точки самопересечения и т. д. Отсюда мы можем заключить, что число точек самопересечения рассматриваемой линии равно наибольшему целому числу n, такому, что $n\frac{\alpha}{2} < 90°$ (или, что то же самое, $n\alpha < 180°$). Полное доказательство, очевидное после всего вышесказанного, можно провести по методу математической индукции.



Черт. 109.

37. а) Первое решение. Пусть ABC — какой-нибудь треугольник, вершины которого лежат в узлах сетки. Рассмотрим прямоугольник, составленный из квадратов сетки, стороны которого проходят через вершины треугольника ABC (черт. 109). Тогда площадь треугольника ABC равна площади прямоугольника без площадей трех прямоугольных треугольников, гипотенузами которых служат стороны нашего треугольника. Площадь прямоугольника и площади прямоугольных треугольников — числа рациональные, так как длина и ширина прямоугольника, а также длины катетов треугольников — целые числа (за единицу измерения мы принимаем длину стороны квадрата сетки). Следовательно, и площадь треугольника ABC есть число рациональное.

Допустим теперь, что ABC — равносторонний треугольник. Пусть сторона его a. Тогда его площадь равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Но a есть гипотенуза прямоугольного треугольника с целочисленными катетами. Следовательно, a^2 — число целое. Поэтому $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — число иррациональное. Мы же показали, что площадь треугольника есть число рациональное. Таким образом, не существует равностороннего треугольника с вершинами в вершинах сетки.

Второе решение. Если бы вершины равностороннего треугольника ABC лежали в вершинах сетки, то (см. черт. 109)

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{DC}{DA}, \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{BE}{EA}.$$

Так как DC, DA, BE и EA — целые числа, то $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — числа рациональные.

Обозначим

$$\operatorname{tg}\alpha=m \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\beta=n;$$

$\angle BAC=180^\circ-\alpha-\beta=60^\circ$, ибо треугольник ABC равносторонний. Отсюда

$$\operatorname{tg}60^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha-\beta)=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\frac{m+n}{1-mn}.$$

Так как m и n — рациональные числа, то $\frac{m+n}{1-mn}$ — тоже рациональное число.

Но $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$ и потому есть число иррациональное. Полученное противоречие и показывает, что так поместить правильный треугольник нельзя.

Третье решение. Проведем в плоскости оси координат. За начало координат выберем вершину B треугольника ABC. Ось Ox направим вдоль одной стороны квадрата с вершиной в B, ось Oy — вдоль другой его стороны. За единицу длины примем длину стороны квадрата.

Пусть в этой системе координат вершина A имеет координатами числа x и y, вершина C — числа u и v; x, y, u, v — целые числа.

Длина стороны AB равна x^2+y^2, длина стороны BC u^2+v^2, а из прямоугольного треугольника ACD получаем, что длина стороны AC равна $(x-u)^3+(y-v)^2$. Если треугольник ABC равносторонний, то

$$x^2+y^2=u^2+v^2=(x-u)^2+(y-v)^2.$$

Мы можем считать в этом равенстве числа x, y, u, v взаимно простыми (с наибольшим общим делителем 1), так как если у них есть наибольший общий делитель, отличный от 1, то мы сократим все три части равенства на его квадрат, а в полученном равенстве числа x, y, u, v будут уже взаимно просты. Поэтому мы можем считать, что не все числа x, y, u, v четны. Далее, из равенства $x^2+y^2=u^2+v^2$ следует, что либо все четыре числа x, y, u, v нечетны, либо одно из чисел x, y четно, а второе нечетно, и аналогично одно из чисел u, v четно, а второе нет. В первом из этих двух случаях имеем

$$\begin{aligned} x&=2x_1+1, & u&=2u_1+1,\\ y&=2y_1+1, & v&=2v_1+1, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} 4(x_1^2+x_1+y_1^2+y_1)+2&=4(u_1^2+u_1+v_1^2+v_1)+2=\\ &=4(x_1-u_1)^2+4(y_1-v_1)^2; \end{aligned}$$

два первых выражения на 4 не делятся, а третье выражение на 4 делится, что невозможно.

Во втором случае имеем

$$x=2x_1,\quad y=2y_1+1,\quad u=2u_1\quad v=2v_1+1,$$

и, следовательно,

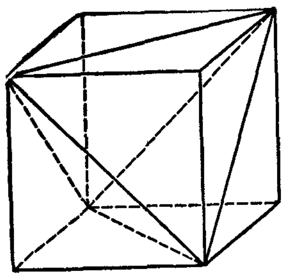
$$\begin{aligned} 4(x_1^2+y_1^2+y_1)+1&=4(u_1^2+v_1^2+v_1)+1=\\ &=4(x_1-u_1)^2+4(y_1-v_1)^2. \end{aligned}$$

Первые два выражения не делятся на 4, а последнее — делятся, что невозможно.

Точно так же исследуется случай, когда x и v четны, а y и u нечетны.

Так как все случаи оказываются невозможными, то не существует целых чисел x, y, u, v, удовлетворяющих требуемым равенствам, а значит, не существует равностороннего треугольника с вершинами в узлах сетки.

б) Рассмотрим произвольный куб с вершинами в узлах решетки (черт. 110). Из одной его вершины проведем по диагонали во всех трех примыкающих гранях и вторые концы этих диагоналей соединим между собой. Тогда полученные прямые также будут диагоналями граней. Эти шесть прямых будут ребрами правильного тетраэдра. Действительно, число граней полученного многогранника четыре, все его ребра равны как диагонали равных квадратов, все грани — равные равносторонние треугольники. Из равенства плоских углов трехгранного угла следует также равенство самих трехгранных углов (равенство трехгранных углов можно показать и непосредственно, совмещая куб с самим собой).



Черт. 110.

38. а) Пусть некоторую фигуру можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги.

Рассмотрим все точки, в которых наша линия самопересекается, а также начальную и конечную точки вычерчивания. Будем называть эти точки *узлами*, а части нашей линии, на которые разбивают ее узлы,— отрезками. Узлы, в которых сходится четное число отрезков, будем называть четными, а узлы, в которых сходится нечетное число отрезков,— нечетными.

Рассмотрим какой-нибудь узел, не являющийся ни началом ни концом пути при нашем обходе фигуры. Проходя этот узел, мы каждый раз проходим пару примыкающих к нему отрезков. Так как после обхода всей фигуры мы должны пройти все отрезки, примыкающие к рассматриваемому узлу и ни один из них не можем пройти дважды, то этот узел должен быть четным.

Теперь рассмотрим начальный и конечный узлы. Здесь может представиться два случая:

1) начальная и конечная точка вычерчивания совпадают,

2) начальная и конечная точка различны.

В первом случае все отрезки, оканчивающиеся в начальном узле, можно разбить на пары,— несколько пар, по которым мы проходили через этот узел, и пара, состоящая из начального и конечного отрезков. Таким образом, в этом случае и этот последний узел является четным. Аналогично получаем, что во втором случае начальный и конечный узлы — нечетные, а остальные узлы — четные. Таким образом, если фигуру можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, то число ее нечетных узлов не больше двух [1]).

Теперь покажем, что если число нечетных узлов фигуры не превышает двух, то такую фигуру можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги. (Разумеется, мы предполагаем, что наша фигура — связная, т. е. не состоит из нескольких, не связанных между собой кусков — в противном случае надо говорить не об одной, а о нескольких фигурах.) Здесь могут представиться два случая — либо все узлы четные, либо есть хотя бы один нечетный узел.

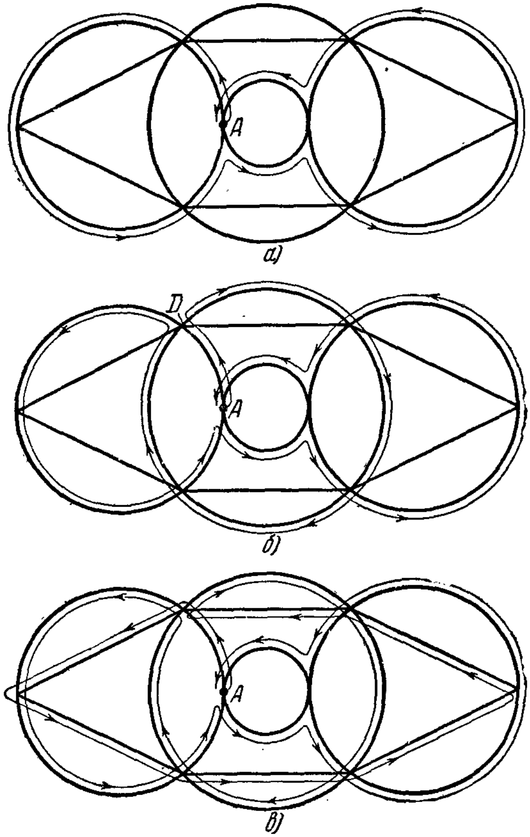
В обоих случаях будем вести доказательство по индукции.

I случай. Мы умеем чертить фигуру, состоящую только из одного отрезка. Будем теперь предполагать, что мы знаем способ вычерчивания любой фигуры, состоящей не более, чем из n отрезков, и укажем способ вычерчивания фигуры, состоящей из $n+1$ отрезка.

Выбрав какой угодно узел за начало, начнем чертить нашу фигуру, выходя каждый раз из узлов по еще незачерченным линиям. Очевидно, что наша непрерывая линия может окончиться только в начальном узле, так как во все другие узлы входит четное число отрезков, и поэтому для каждого входящего отрезка мы сможем последовательно находить выходящий. При этом может оказаться, что, возвратившись в начальную точку, мы уже начертили всю фигуру, и задача уже решена. Если же у нас остается ряд незачерченных отрезков (черт. 111, a), то, во-первых, в каждом узле будет сходиться четное число их (так как в каждом узле мы зачертили четное число линий), а во-вторых, число этих отрезков будет не больше n (так как один отрезок мы во всяком случае зачертили). Эти отрезки поэтому образуют одну

[1]) Отметим, что общее число нечетных узлов фигуры обязательно четно, так как сумма всех сумм отрезков, сходящихся в отдельных узлах, равна удвоенному числу отрезков (каждый отрезок имеет два конца), т. е. четна. В частности, фигура не может иметь единственный нечетный узел.

или несколько фигур, удовлетворяющих условию задачи, причем число отрезков каждой фигуры меньше или равно n. По предположению индукции, мы такие фигуры чертить



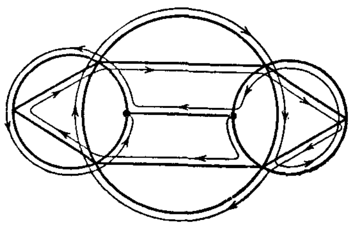
Черт. 111.

умеем. Заметим, что каждая из этих фигур пересекается с вычерченной нами линией, причем при вычерчивании такой фигуры мы можем брать в качестве начальной точки одну из точек пересечения этой фигуры с нашей линией, так как кривую, все узлы которой четные, можно начинать чертить из любой ее точки.

Поэтому мы сможем начертить всю нашу фигуру следующим образом: сначала вычерчиваем отрезок нашей первой линии от начальной точки A до первой точки пересечения D_1 с одной из остающихся фигур, затем вычерчиваем всю эту фигуру, затем отрезок линии от D_1 до D_2 — точки пересечения второй по порядку фигуры с нашей линией, затем эту фигуру и т. д., пока, наконец, не возвращаемся в исходную точку A (см. черт. 111, *б, в*).

II случай. Аналогично будем проводить построение во втором случае.

Начнем вычерчивать нашу фигуру из одного из нечетных узлов. Так как фигура состоит из конечного числа отрезков, то этот процесс должен где-нибудь оборваться. Но, как мы показали при разборе первого случая, он может оборваться только в нечетном узле (начальный узел, после того как мы зачертили один из исходящих из него отрезков, стал четным). Поэтому существует еще один нечетный узел, в котором и оборвется наша кривая. Тогда в оставшихся частях фигуры все узлы будут четными, так как во всей фигуре было не более двух нечетных узлов, а мы зачертили четное число отрезков в четных узлах и нечетное число — в обоих нечетных. Поэтому оставшиеся части фигуры можно включить в нашу кривую точно таким же способом, как это было сделано при разборе первого случая [1]) (см. черт. 112).



Черт. 112.

б) Построим схему улиц Москвы, на которой каждый отрезок улицы (квартал) изобразим двумя близкими линиями, имеющими общие концы. При этом перекресткам, тупикам и концам улиц, переходящим в загородные шоссе, будут соответствовать узлы схемы. Заметим, что все узлы будут

[1]) Из нашего доказательства, в частности, еще раз следует, что вовсе не существует фигур, имеющих единственный нечетный узел (см. сноску на стр. 135).

четными, так как в каждом узле будет сходиться вдвое больше линий, чем сходится улиц в соответствующем перекрестке. Раз это так, то такую фигуру согласно предыдущей задаче можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги.

Будем теперь обходить улицы Москвы в том же порядке, в каком мы проводили соответствующие им линии на схеме, рисуя ее одним росчерком; тогда, очевидно, мы обойдем все улицы и притом каждую два раза, так как у нас каждому отрезку улицы соответствовало ровно две линии.

С другой стороны, если бы мы смогли, обходя Москву, пройти по каждой улице ровно три раза, то тогда бы оказалось, что схему улиц Москвы, в которой каждый отрезок улицы изображается тремя линиями, можно нарисовать одним росчерком. Но это не так. Действительно, рассмотрим три нечетных «перекрестка»: конец Ленинградского шоссе как улицы Москвы, конец Можайского шоссе и конец Серпуховского шоссе. В соответствующих узлах схемы будут сходиться по три линии. Таким образом, у схемы по меньшей мере три нечетных узла (в действительности за счет других загородных шоссе и Т-образных перекрестков их будет гораздо больше).

Значит, нашу схему нельзя нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, и, следовательно, нельзя обойти Москву, пройдя по каждой улице ровно три раза.

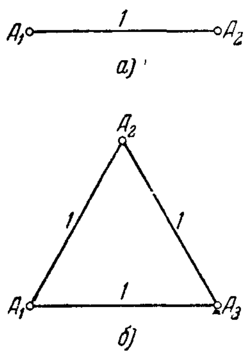
Замечание. Это же предложение остается, очевидно, справедливым для любого города, из которого выходит не менее трех шоссейных дорог.

39. 1° $n=2$, 3. Совершенно очевидно, что система двух или трех точек, расстояние между каждыми двумя из которых не меньше 1, может иметь диаметр 1 (черт. 113, *а*, *б*).

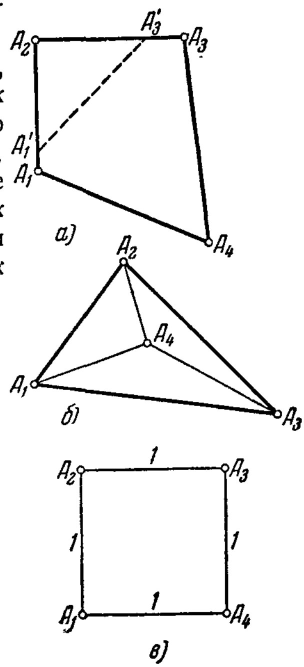
2° $n=4$. Четыре точки на плоскости являются вершинами выпуклого четырехугольника (черт. 114, *а*) или три из них образовывают треугольник, внутри которого расположена четвертая точка (черт. 114, *б*). В первом случае хотя бы один из углов четырехугольника будет не меньше 90°; пусть это будет, например, угол $A_1A_2A_3$. Отложим на сторонах A_2A_1 и A_2A_3 угла отрезки $A_2A_1'=A_2A_3'=1$; очевидно, $A_1'A_3'\leqslant$

$\leqslant A_1A_3$. Далее, из сравнения треугольника $A_1'A_2A_3'$ и равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами 1 заключаем, что $A_1'A_3' \geqslant \sqrt{2}$ (по теореме о треугольниках с двумя соответственно равными сторонами). Отсюда следует, что $A_1A_3 \geqslant \sqrt{2}$. Таким образом, в этом случае диаметр нашей системы четырех точек не меньше чем $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$

Если четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 расположены так, как изображено на черт. 114, *б*, то хотя бы один из углов $A_1A_4A_2$, $A_2A_4A_3$, $A_3A_4A_1$ не меньше $120°$. Отсюда в точности, как выше, заключаем, что в этом случае диаметр системы точек



Черт. 113.



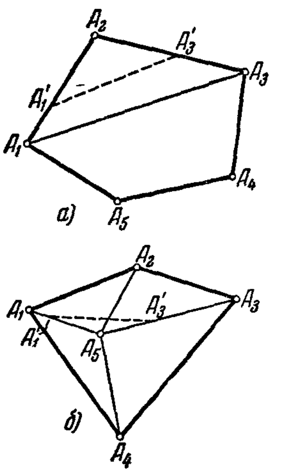
Черт. 114.

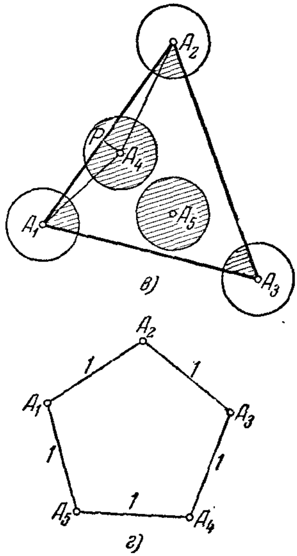
не меньше $\sqrt{3} = 1{,}73\ldots$ ($\sqrt{3}$ есть основание равнобедренного треугольника с боковыми сторонами 1 и углом при вершине в $120°$).

Итак, во всех случаях диаметр системы точек не меньше $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$; диаметр в точности равен $\sqrt{2}$ в том (и только в том) случае, когда точки расположены в вершинах квадрата (черт. 114, *в*).

3° $n=5$. Пять точек на плоскости являются вершинами выпуклого пятиугольника (черт. 115, *а*) или четыре из них образуют выпуклый четырехугольник, внутри которого расположена пятая точка (черт. 115, *б*), или три точки образуют треугольник, внутри которого заключены остальные две точки (черт. 115, *в*). Рассмотрим последовательно все эти случаи.

Если пять точек образуют выпуклый пятиугольник, то хотя бы один из углов пятиугольника не меньше 108° $\left(108^\circ = \frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5}\right)$. Если, например, $\angle A_1A_2A_3 \geqslant 108^\circ$,





Черт. 115.

то, повторяя почти дословно рассуждения п. 2°, мы докажем, что $A_1A_3 \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61\ldots$ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\sin 54^\circ\right.$ есть основание равнобедренного треугольника с боковыми сторонами 1 и углом при вершине в 108°). Таким образом, в этом случае диаметр системы точек не меньше $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61\ldots$

Если пять точек расположено так, как это изображено на черт. 115, *б*, то диаметр системы точек тоже не может быть меньше $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Действительно, из четырех углов $A_1A_5A_3$, $A_2A_5A_4$, $A_3A_5A_1$ и $A_4A_5A_2$ [1]) по крайней мере два не превосходят $180°$; пусть это будут, например, углы $A_1A_5A_3$ и $A_2A_5A_4$. В таком случае сумма трех углов $A_1A_5A_3$, $A_2A_5A_4$ и $A_4A_5A_1$ будет больше $360°$ (она будет превосходить $360°$ на величину угла $A_2A_5A_3$). Следовательно, хотя бы один из этих углов больше $120°$; пусть это будет, например, угол $A_1A_5A_3$. В этом случае

$$A_1A_3 \geqslant \sqrt{3} = 1{,}73\ldots > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(ср. с п. 2° решения).}$$

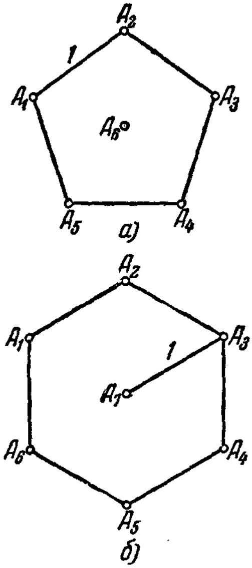
Предположим, наконец, что пять точек расположены так, как это изображено на черт. 115, *в*. Опишем вокруг всех пяти точек круги радиуса $^1/_2$; очевидно, никакие два из этих кругов не пересекутся. Далее, если, например, круг с центром в точке A_4 пересекает сторону A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$, то длины отрезков A_1P и A_2P, где P есть проекция A_4 на A_1A_2, не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$; действительно, $A_1P = \sqrt{A_1A_4^2 - A_4P^2} \geqslant \geqslant \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\text{ибо } A_1A_4 \geqslant 1,\ A_4P \leqslant \frac{1}{2}\right)$. Таким образом, в этом случае $A_1A_2 \geqslant \sqrt{3} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Если же ни один из кругов с центрами во внутренних точках A_4 и A_5 не пересекает сторон треугольника $A_1A_2A_3$, то площадь $A_1A_2A_3$ больше $2^1/_2 \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5\pi}{8}$ (внутри треугольника помещаются два круга радиуса $^1/_2$ и три сектора, сумма центральных углов которых равна $180°$). С другой стороны, хотя бы один

---

[1]) Здесь, например, $\angle A_1A_5A_3$ есть угол, на который надо повернуть A_5A_1 вокруг A_5 в направлении по часовой стрелке, чтобы совместить со стороной A_5A_3 угла; таким образом, углы $A_1A_5A_3$ и $A_3A_5A_1$ не равны:

$$\angle A_1A_5A_3 + A_3A_5A_1 = 360°.$$

из трех углов треугольника $A_1A_2A_3$ не превосходит 60; пусть это будет, например, $\angle A_1A_2A_3$. Предположим еще, что $A_1A_2 \geqslant A_2A_3$; в таком случае будем иметь



Черт. 116.

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot A_2A_3 \sin \angle A_1A_2A_3 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} A_1A_2^2 \sin 60^\circ = \frac{A_1A_2^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Итак, окончательно получаем неравенство

$$\frac{A_1A_2^2 \sqrt{3}}{4} \geqslant \frac{5\pi}{8},$$

откуда следует, что

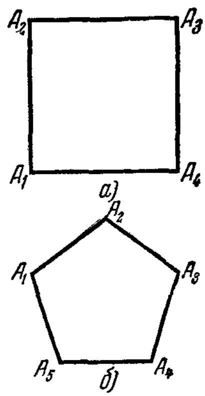
$$A_1A_2 \geqslant \sqrt{\frac{5\pi}{2\sqrt{3}}} > \sqrt{\frac{14}{3,5}} =$$
$$= \sqrt{4} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Итак, во всех случаях диаметр системы не меньше $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61\ldots$; диаметр в точности равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ в том (и только в том) случае, когда точки расположены в вершинах правильного пятиугольника (черт. 115, *г*).

Примечание. При $n > 5$ наиболее выгодным в смысле настоящей задачи расположением n точек уже не будет то, при котором точки расположены в вершинах правильного n-угольника. Так наименьшее возможное значение, которое может иметь диаметр системы шести точек, расстояние между каждыми двумя из которых не меньше 1, равно $2 \sin 72^\circ = 1,90\ldots$; соответствующее расположение точек изображено на черт. 116, *а*. В случае $n=7$ наименьшее возможное значение диаметра есть 2; соответствующее расположение семи точек изображено на черт. 116, *б*.

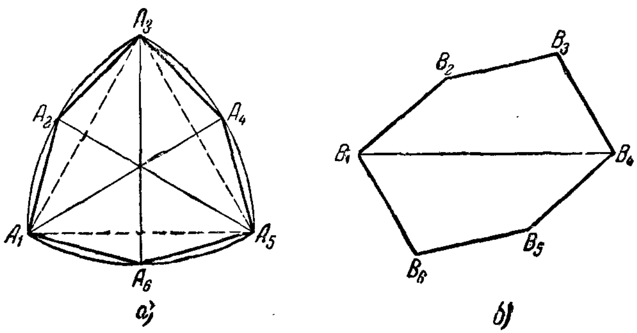
40. 1° $n=4$. Повторяя почти дословно рассуждения п. 2° решения предыдущей задачи, убеждаемся, что из всех четырехугольников со сторонами длины 1 наименьший диаметр имеет квадрат (черт. 117, *а*); его диаметр равен $\sqrt{2} = 1,41\ldots$

2° $n=5$. Повторяя почти дословно соответствующие рассуждения п. 3° решения предыдущей задачи, убеждаемся, что из всех пятиугольников со сторонами длины 1 наименьший диаметр имеет правильный пятиугольник (черт. 117, *б*); его диаметр $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}61\ldots$



Черт. 117.

3° $n=6$. Проведем из каждой вершины равностороннего треугольника $A_1A_3A_5$ со стороной d как из центра дугу, соединяющую две другие вершины (черт. 118, *а*). Середины дуг A_1A_3, A_3A_5 и A_5A_1 обозначим соответственно через A_2, A_4 и A_6; в таком случае $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ есть выпуклый шестиугольник, все стороны которого равны между собой. Так как дуга A_1A_3 равна 60°, то $\angle A_3A_1A_2=\frac{30^\circ}{2}=15^\circ$; отсюда легко выводится, что $\angle A_6A_1A_2=60^\circ+2\cdot 15^\circ=90^\circ$ и $\angle A_1A_2A_3=180^\circ-2\cdot 15^\circ=150^\circ$. Таким образом, у шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ чередуются углы 90° и 150°. Из того, что $\angle A_6A_1A_2=90^\circ$, $\angle A_1A_2A_3=150^\circ$, заключаем: $A_6A_2<A_1A_3=d$; отсюда сле-



Черт. 118.

дует, что диаметр шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ равен d (d равны диагонали A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, A_1A_3, A_3A_5 и A_5A_1

этого шестиугольника). Предположим теперь, что стороны шестиугольника равны 1; в таком случае диаметр d равен $2\sin 75^\circ = 1{,}93\ldots$ Покажем теперь, что никакой шестиугольник со сторонами длины 1 не может иметь меньший диаметр.

Пусть $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ есть какой-то выпуклый шестиугольник, все стороны которого равны 1 (черт. 118, *б*). Так как сумма всех углов шестиугольника равна $180^\circ(6-2) = 720^\circ$, найдутся два соседних угла шестиугольника, сумма которых не меньше, чем $\frac{2\cdot 720^\circ}{6} = 240^\circ$; пусть, например, B_2 и B_3 — такие углы. Если при этом хотя бы один из углов B_2, B_3 больше 150°, то диагональ, соединяющая вторые концы сторон, сходящихся в этом углу, будет больше чем $2\sin 75^\circ$. Докажем теперь, что если $\angle B_2 \leqslant 150^\circ$ и $\angle B_3 \leqslant 150^\circ$, то $B_1B_4 \geqslant 2\sin 75^\circ$. Из треугольника $B_1B_2B_3$ находим $B_1B_3 = 2\sin\frac{\angle B_2}{2}$, $\angle B_2B_3B_1 = 90^\circ - \frac{\angle B_2}{2}$ и, следовательно,

$$\angle B_1B_3B_4 = \left(\angle B_3 + \frac{\angle B_2}{2}\right) - 90^\circ.$$

Теперь по теореме косинусов имеем из треугольника $B_1B_3B_4$

$$B_1B_4^2 = B_3B_4^2 + B_1B_3^2 - 2B_3B_4\cdot B_1B_3\cos\angle B_1B_3B_4 =$$
$$= 1 + 4\sin^2\frac{B_2}{2} - 4\sin\frac{B_2}{2}\cos\left[\left(B_3 + \frac{B_2}{2}\right) - 90^\circ\right] =$$
$$= 1 - 4\sin\frac{B_2}{2}\left[\sin\left(B_3 + \frac{B_2}{2}\right) - \sin\frac{B_2}{2}\right] =$$
$$= 1 - 8\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}\cos\frac{B_2 + B_3}{2} =$$
$$= 1 + 8\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_2}{2}\sin\left(\frac{B_2 + B_3}{2} - 90^\circ\right).$$

Таким образом, расстояние B_1B_4 будет наименьшим, когда выражение $\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}\sin\left(\frac{B_2+B_3}{2} - 90^\circ\right)$ будет наименьшим.

Воспользуемся теперь тем, что

$$\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{B_2 - B_3}{2} - \cos\frac{B_2 + B_3}{2}\right).$$

Следовательно, при заданной сумме $\angle B_2 + \angle B_3 = \sigma$ (по условию $\sigma \geqslant 240^\circ$) выражение $\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}$ будет тем меньше, чем больше будет по абсолютной величине разность $\angle B_2 - \angle B_3$. Но по условию ни один из углов B_2, B_3 не превосходит 150°; поэтому при заданной сумме σ выражение $\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}$ $\left(\text{следовательно, и } \sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}\sin\left(\frac{B_2+B_3}{2}-90^\circ\right)\right.$, а значит и длина B_1B_4) будет наименьшим, если $\angle B_2 = 150^\circ$ или $\angle B_3 = 150^\circ$.

Предположим теперь, что $\angle B_2 = 150^\circ$, $\angle B_3 = \sigma - 150^\circ$. В таком случае имеем

$$B_1B_4^2 = 1 + 8\sin 75^\circ \sin\left(\frac{\sigma}{2} - 75^\circ\right)\sin\left(\frac{\sigma}{2} - 90^\circ\right).$$

Но заметим теперь, что в шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (черт. 118, *а*) $\angle A_2 = 150^\circ$ и $\angle A_2 + \angle A_3 = 240^\circ$; поэтому

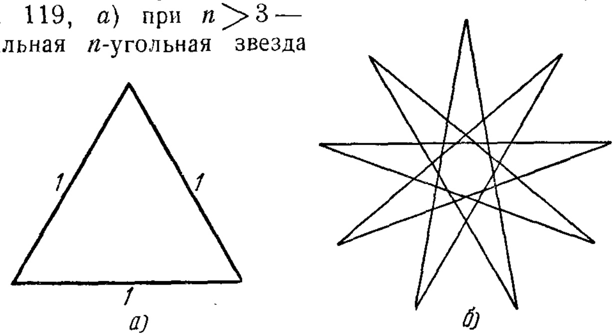
$$A_1A_4^2 = 1 + 8\sin 75^\circ \sin(120^\circ - 75^\circ)\sin(120^\circ - 90^\circ).$$

Из сравнения выражений для $B_1B_4^2$ и $A_1A_4^2$ непосредственно следует, что $B_1B_4 \geqslant A_1A_4 = 2\sin 75^\circ$ (ибо $\sigma \geqslant 240^\circ$; следовательно, $\sin\left(\frac{\sigma}{2} - 75^\circ\right) \geqslant \sin(120^\circ - 75^\circ)$, $\sin\left(\frac{\sigma}{2} - 90^\circ\right) \geqslant$ $\geqslant \sin(120^\circ - 90^\circ)$); при этом $B_1B_4 = A_1A_4$ только в том случае, если $\angle B_2 = \angle A_2$, $\angle B_3 = \angle A_3$.

Таким образом, мы заключаем, что ни один шестиугольник со сторонами длины 1 не имеет диаметра, меньшего $2\sin 75^\circ = 1{,}93\ldots$; диаметр шестиугольника точно равен $2\sin 75^\circ$ в том (и только в том) случае, когда шестиугольник имеет вид, изображенный на черт. 118, *а*.

Примечание. Мы видели, что из всех пятиугольников со сторонами длины 1 наименьший диаметр имеет правильный пятиугольник; для шестиугольников это предложение уже не имеет места. Это положение является общим: доказано, что при n нечетном правильный n-угольник имеет наименьший диаметр из всех n-угольников со сторонами длины 1 (но только в том случае, когда число n — простое, не существует других n-угольников, диаметр которых равен диаметру правильного n-угольника), а при n четном, большем 4, это уже неверно. Показано также, что при четном n, не являющемся степенью двух, наименьший возможный диаметр n-угольника со сторонами длины 1 равен радиусу круга, описанного вокруг правильного $2n$-угольника со сторонами длины 1 (так, в случае $n=6$ наименьшее возможное значение диаметра, как мы видели, равно $2\sin 75°$; но $2\sin 75°$ есть радиус круга, описанного вокруг правильного 12-угольника со стороной 1). В случае, когда n есть степень двойки, бо́льшая 4, вопрос остается открытым. Показано только, что в этом случае наименьшее возможное значение диаметра заключается где-то между диаметром окружности, описанной вокруг правильного n-угольника со стороной 1 (правило, по которому определяется наименьший возможный диаметр в случае нечетного n), и радиусом окружности, описанной вокруг правильного $2n$-угольника со стороной 1 (правило, по которому определяется наименьший возможный диаметр в случае четного n, не являющегося степенью 2-х).

41. Совершенно очевидно, что можно построить ломаную с любым нечетным числом звеньев, удовлетворяющую условиям задачи: при $n=3$ это будет правильный треугольник (черт. 119, *а*) при $n>3$ — правильная n-угольная звезда



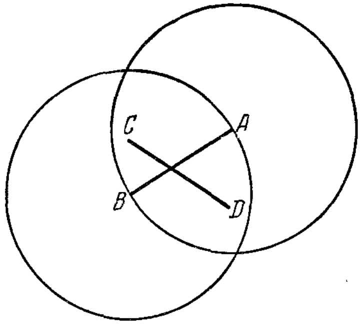
Черт. 119.

(черт. 119, *б*). Докажем теперь, что ни при каком четном n такая ломаная невозможна.

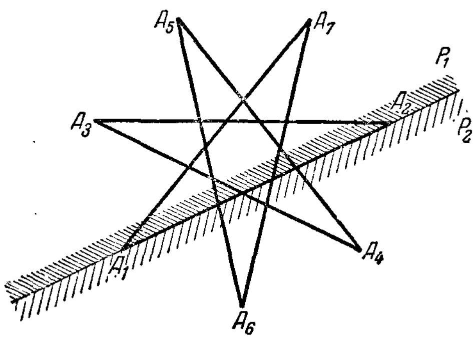
Пусть AB, CD — два несоседних звена какой-либо ломаной, удовлетворяющей условиям задачи. Мы утверждаем, что CD пересекает AB.

Действительно, согласно условию задачи, точки C и D обе лежат внутри пересечения двух кругов радиуса 1 с центрами в точках A и B (черт. 120). Отсюда сразу следует, что C и D не могут лежать по одну сторону AB, ибо если C лежит по какую-то определенную сторону от AB, то все остальные общие точки рассматриваемых кругов, расположенные по ту же сторону от AB, что и C, удалены от C меньше чем на 1.

Рассмотрим теперь две полуплоскости P_1 и P_2, на которые разбивает плоскость прямая какого-либо звена A_1A_2 ломаной $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, удовлетворяющей условиям задачи (черт. 121). Пусть точка A_3 лежит в полуплоскости P_1. Тогда A_4 лежит в полуплоскости P_2 (ибо A_3A_4 пересекает A_1A_2); точка A_5 лежит в полуплоскости P_1 (ибо A_4A_5 пересекает A_1A_2); точка A_6 лежит в полуплоскости P_2 (ибо A_5A_6 пересекает A_1A_2) и т. д., т. е. все вершины ломаной с нечетными номерами (кроме A_1) лежат в полуплоскости P_1 и все вершины с четными номерами (кроме A_2) — в полуплоскости P_2. Но звенья A_2A_3 и A_1A_n ломаной пересекаются; отсюда следует, что точки A_3 и A_n лежат в одной и той же полуплоскости. Следовательно, n нечетно, что и требовалось доказать.



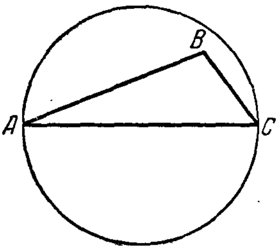
Черт. 120.

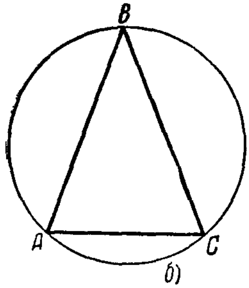


Черт. 121.

Примечание. Представляет интерес вопрос о том, каков наименьший возможный диаметр замкнутой ломаной (может быть самопересекающейся), составленной из *четного числа* n отрезков длины 1. Рекомендуем читателю попытаться самому решить этот вопрос для случаев $n=4$ и $n=6$ (решение вопроса для общего случая неизвестно).

42. Если наша система точек совпадает с вершинами правильного треугольника со стороной 1, то ее нельзя заключить внутрь круга радиуса, меньшего, чем $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right.$ есть радиус круга, описанного вокруг правильного треугольника со стороной 1; см. решение задачи 18). Пусть теперь мы имеем какую угодно систему точек диаметра 1. Нетрудно показать, что каждые три точки A, B и C системы можно заключить внутрь круга радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Действительно, если треугольник ABC тупоугольный, то он весь помещается внутри окружности, описанной на большей стороне, как на диаметре (черт. 122, *а*); но так как диаметр системы точек не превышает 1, то радиус этой окружности не больше $^1/_2$, т. е. даже меньше $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Если же треугольник ABC остроугольный (черт. 122, *б*), то хотя бы один его угол не меньше 60° (ибо сумма всех углов равна 180°); пусть это будет, например, угол B. Тогда по теореме синусов будем иметь





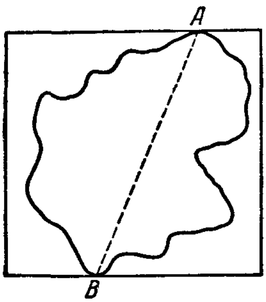
Черт. 122.

$$R = \frac{AC}{2\sin B} \leqslant \frac{1}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

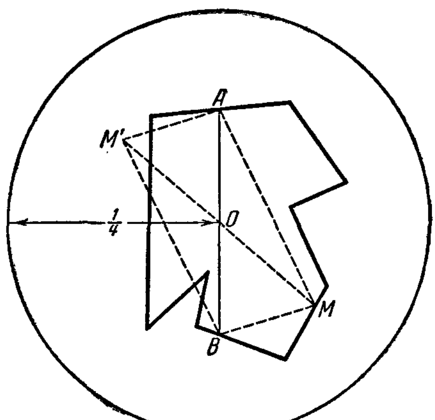
где R — радиус круга, описанного вокруг треугольника ABC. Из того, что каждые три из рассматриваемых точек можно заключить внутрь круга радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$, следует, что и все точки можно заключить внутрь круга радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (см. задачу 18). Таким образом, наименьшая окружность, в которую можно заключить любую систему точек диаметра 1, имеет радиус $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

43. Очевидно, что круг диаметра 1 нельзя заключить ни в какой квадрат, сторона которого меньше 1. С другой стороны, почти столь же ясно, что каждую фигуру диаметра 1 можно заключить внутрь квадрата со стороной 1. Действительно, каждый квадрат, заключающий внутри себя какую-то фигуру Ф, всегда можно уменьшить с тем, чтобы хотя бы одна пара противоположных сторон квадрата «упиралась» в фигуру (черт. 123). Но если A и B — точки фигуры Ф диаметра 1, лежащие на противоположных сторонах квадрата, содержащего Ф внутри себя, то расстояние между этими сторонами квадрата (или, что то же самое, сторона квадрата) не превосходит AB, а $AB \leqslant 1$.

Таким образом, наименьший квадрат, в который можно заключить любую фигуру диаметра 1, имеет сторону, равную 1.



Черт. 123.



Черт. 124.

44. Докажем, что всякую плоскую замкнутую ломаную периметра 1 можно заключить внутрь круга радиуса $^1/_4$. Пусть A — произвольная точка нашей ломаной, B — такая точка ломаной, что обе части ломаной, соединяющие точки A и B, имеют одну и ту же длину $^1/_2$, O — середина отрезка AB (черт. 124). Проведем окружность радиуса $^1/_4$ с центром в точке O. Мы утверждаем, что вся ломаная будет заключаться внутри этой окружности, т. е. что расстояние любой точки M ломаной до точки O не больше $^1/_4$. Действительно, пусть M — произвольная точка ломаной, M' — точка, симметричная M относительно точки O. Соединим точки M и M' с точками A и B. Так как AM не больше части ломаной, заключенной между точками A и M, а BM не больше части ломаной, заключенной между точками B и M, то $AM+BM$ не больше части ломаной, заключенной между точками A и B, т. е. не больше $^1/_2$. Но из черт. 124 нетрудно усмотреть, что $AM=BM'$, $BM=AM'$, $OM=OM'$. Из рассмотрения треугольника AMM' нетрудно вывести, что

$$MM'=2OM \leqslant AM+AM'=AM+BM \leqslant \frac{1}{2}, \quad OM \leqslant \frac{1}{4},$$

что и требовалось доказать.

С другой стороны, диаметр ломаной периметра 1 может быть сколь угодно близок к $^1/_2$ (так будет, например, в том случае, если ломаная представляет собой ромб со стороной $^1/_4$ и очень малым острым углом). А так как диаметр круга, содержащего ломаную, очевидно, не может быть меньше диаметра ломаной, то никакой круг радиуса, меньшего $^1/_4$, не может покрывать любую плоскую замкнутую ломаную периметра 1. Следовательно, искомое значение радиуса круга равно $^1/_4$.

45. Нам надо доказать, что все вершины ломаной лежат внутри круга радиуса 4 с центром в точке A_0, т. е. что все расстояния A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, ..., A_0A_n меньше 4. Пусть A_k — какая-то из вершин A_2, A_3, ..., A_n (то, что вершина A_1 лежит внутри этого круга, очевидно, ибо $A_0A_1=1<4$). Опишем вокруг треугольника $A_0A_1A_2$ окружность C_1, вокруг треугольника $A_1A_2A_3$ — окружность C_2, вокруг треугольника $A_2A_3A_4$ — окружность C_3 и т. д., наконец, вокруг треугольника $A_{k-2}A_{k-1}A_k$ — окружность C_{k-1} (черт. 125, *а*). Центры окружностей C_1, C_2, C_3, ..., C_{k-1} обозначим соответственно через O_1, O_2, O_3, ..., O_{k-1}.

Рассмотрим ломаную $A_0O_1O_2O_3\ldots O_{k-1}A_k$. Очевидно,

$$A_0A_k \leqslant A_0O_1+O_1O_2+O_2O_3+\ldots+O_{k-2}O_{k-1}+O_{k-1}A_k=$$
$$=A_0O_1+(O_1O_2+O_2O_3+\ldots+O_{k-2}O_{k-1})+O_{k-1}A_k.$$

Пусть S_1 есть середина отрезка A_0A_1. Из треугольника $A_1S_1O_1$ находим

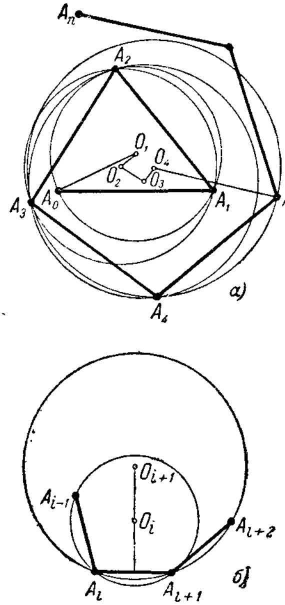
$$A_0O_1 = A_1O_1 = \frac{A_1S_1}{\cos\angle O_1A_1S_1} = \frac{^1/_2}{\cos\frac{\angle A_2A_1A_0}{2}}.$$

Но по условию $\angle A_2A_1A_0 \leqslant 120°$; следовательно, $\frac{\angle A_2A_1A_0}{2} \leqslant 60°$ и

$$A_0O_1 \leqslant \frac{^1/_2}{\cos 60°} = 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$A_kO_{k-1} \leqslant 1.$$



Черт. 125.

Таким образом, нам остается только оценить длину ломаной $O_1O_2O_3\ldots O_{k-1}$. Проведем через точки A_0 и A_1 окружности C'_2, $C'_3, \ldots, C'_{k-1}$, равные соответственно окружностям $C_2, C_3, \ldots$ $\ldots, C_{k-1}$; центры этих окружностей обозначим через $O'_2, O'_3, \ldots$ $\ldots, O'_{k-1}$. Мы утверждаем, что

$$O_1O_2 = O_1O'_2,\quad O_2O_3 = O'_2,O'_3,$$
$$O_3O_4 = O'_3O'_4,\ \ldots$$
$$\ldots,\ O_{k-2}O_{k-1} = O'_{k-2}O'_{k-1}.$$

Действительно, пара окружностей C_1 и C_2 равна паре окружностей C_1 и C'_2; если сдвинуть первую пару окружностей так, чтобы отрезок A_1A_2 перешел в равный ему отрезок A_0A_1, то эта пара совпадает с парой окружностей C_1 и C'_2. Отсюда следует, что $O_1O_2 = O_1O'_2$. Аналогично пара окружностей C_2 и C_3 равна паре окружностей C'_2 и C'_3; движение, переводящее отрезок A_2A_3 в отрезок A_0A_1, совмещает первую пару окружностей со второй. Поэтому $O_2O_3 = O'_2O'_3$. Точно так же доказываются и равенства $O_3O_4 = O'_3O'_4, \ldots, O_{k-2}O_{k-1} = O'_{k-2}O'_{k-1}$ (см. черт. 125,*б*).

Таким образом,

$$O_1O_2+O_2O_3+O_3O_4+\ldots+O_{k-2}O_{k-1}=O_1O_2'+O_2'O_3'+ \\ +O_3'O_4'+\ldots+O_{k-2}'O_{k-1}'.$$

Все точки $O_1, O_2', O_3', \ldots, O_{k-1}'$ расположены на перпендикуляре, восставленном к отрезку A_0A_1 в его середине S_1. Если обозначить середины отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, O_{k-2}A_{k-1}$ соответственно через $S_2, S_3, \ldots, S_{k-1}$, то легко получить

$$O_1S_1=A_1S_1\operatorname{tg}\angle O_1A_1S_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle A_2A_1A_0}{2},$$

$$O_2'S_1=O_2S_2=A_2S_2\operatorname{tg}\angle O_2A_2S_2=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle A_3A_2A_1}{2},$$

$$O_3'S_1=O_3S_3=A_3S_3\operatorname{tg}\angle O_3A_3S_3=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle A_4A_3A_2}{2},$$

. . . .

$$O_{k-1}'S_1=O_{k-1}S_{k-1}=A_{k-1}S_{k-1}\operatorname{tg}\angle O_{k-1}A_{k-1}S_{k-1}= \\ =\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{A_kA_{k-1}A_{k-2}}{2}.$$

Но по условию задачи

$$60^\circ\leqslant\angle A_0A_1A_2\leqslant\angle A_1A_2A_3\leqslant\ldots\leqslant\angle A_{k-2}A_{k-1}A_k\leqslant 120^\circ;$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}30^\circ\leqslant O_1S_1\leqslant O_2'S_1\leqslant O_3'S_1\leqslant\ \ldots\ \leqslant O_{k-1}'S_1\leqslant\frac{1}{2}\operatorname{tg}60^\circ.$$

Из последних неравенств вытекает

$$O_1O_2'+O_2'O_3'+O_3'O_4'+\ \ldots+O_{k-2}'O_{k-1}'=O_1O_{k-1}'= \\ =O_{k-1}'S_1-O_1S_1\leqslant\frac{1}{2}(\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}30^\circ)$$

и, значит,

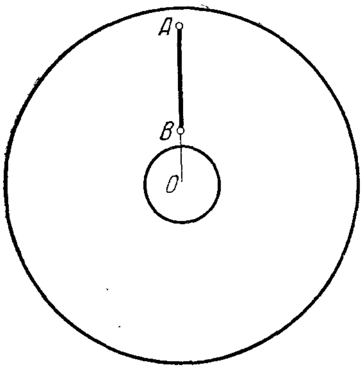
$$O_1O_2+O_2O_3+O_3O_4+\ldots+O_{k-2}O_{k-1}\leqslant\frac{1}{2}(\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}30^\circ)= \\ =\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

откуда окончательно имеем

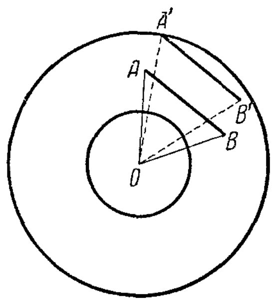
$$A_0A_k\leqslant A_0O_1+(O_1O_2+O_2O_3+\ \ldots+O_{k-2}O_{k-1})+ \\ +O_{k-1}A_k\leqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{3}+1<4,$$

что и требовалось доказать.

46. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда ширина $R-r$ кольца меньше 1; в противном случае угол AOB может быть равен нулю (черт. 126). Далее можно считать, что один конец A отрезка AB расположен на большей из ограничивающих кольцо

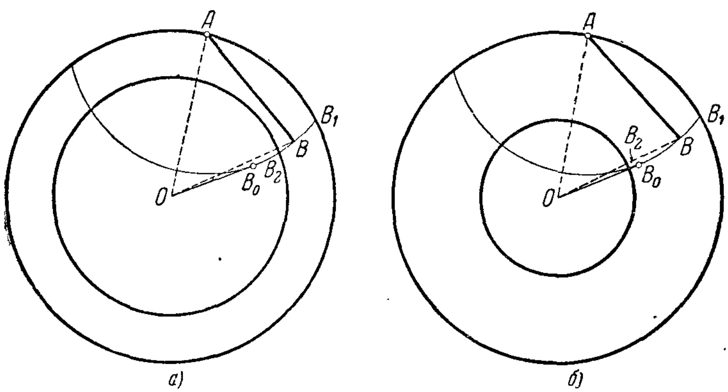


Черт. 126.



Черт. 127.

окружностей: в противном случае сдвинем параллельно отрезок AB так, чтобы один конец его попал на эту окружность; при



Черт. 128.

этом угол AOB только уменьшится (черт. 127). Далее проведем из точки A внутри кольца дугу B_1B_2 радиуса 1 (черт. 128); точка B должна лежать где-то на этой дуге. Проведем теперь из точки O касательную OB_0 к окружности, которой принадлежит эта дуга. Если точка B_0 лежит вне дуги B_1B_2 (черт. 128, *а*) или совпадает с ее концом B_2, то угол AOB при движении точки B по дуге B_1B_2 от точки B_1, лежащей на большей окружности, до B_2 все время увеличивается; следовательно, этот угол принимает наименьшее значение, когда B совпадает с B_1 (и наибольшее, когда B совпадает с B_2). Если же точка B_0 лежит внутри дуги B_1B_2 (черт. 128,*б*), то угол AOB увеличивается, когда точка B движется от B_1 к B_0, а затем начинает уменьшаться; следовательно, в этом случае угол AOB принимает наименьшее значение, когда точка B совпадает с какой-то из точек B_1 или B_2 (и наибольшее, когда B совпадает с B_0). Итак, во всех случаях угол AOB принимает наименьшее значение, когда B совпадает с одной из точек B_1 или B_2.

Отметим теперь, что

$$\cos \angle AOB_2 = \frac{R^2+r^2-1}{2Rr}$$

(следует из рассмотрения треугольника OAB_2), и

$$\cos \angle AOB_1 = \frac{R^2+R^2-1}{2R\cdot R} = 1-\frac{1}{2R^2}.$$

Определим, в каком случае будет больше первый и в каком случае второй из этих углов.

Очевидно,

$$\frac{R^2+r^2-1}{2Rr} - \frac{2R^2-1}{2R^2} = \frac{R^3+Rr^2-R-2R^2r+r}{2R^2r} =$$

$$= \frac{(R-r)(R^2-Rr-1)}{2R^2r} = \frac{(R-r)\left(R-r-\frac{1}{R}\right)}{2Rr}.$$

Отсюда следует, что

$$\text{если } r < R-\frac{1}{R}, \text{ то } \cos\angle AOB_2 > \cos\angle AOB_1$$

и, следовательно, $\angle AOB_2 < \angle AOB_1$;

$$\text{если } r > R-\frac{1}{R}, \text{ то } \cos\angle AOB_2 < \cos\angle AOB_1$$

и, следовательно, $\angle AOB_2 > \angle AOB_1$.

Итак, окончательно получаем: если $r \geqslant R - \frac{1}{R}$, то наименьший возможный угол равен $\arccos\left(1 - \frac{1}{2R^2}\right)\left(=2\arcsin\frac{1}{2R}\right)$; если $r \leqslant R - \frac{1}{R}$ (но $r \geqslant R - 1$), то наименьший возможный угол равен $\arccos\frac{R^2 + r^2 - 1}{2Rr}$ (если $r = R - \frac{1}{R}$, то оба ответа совпадают); если $r \leqslant R - 1$, то наименьший возможный угол равен нулю.

47. Обозначим радиус наименьшего круга, внутри которого можно поместить n точек, одна из которых совпадает с центром круга и расстояния между каждыми двумя не меньше 1, через R_n. Наша задача состоит в том, чтобы определить значения R_n при нескольких первых значениях n.

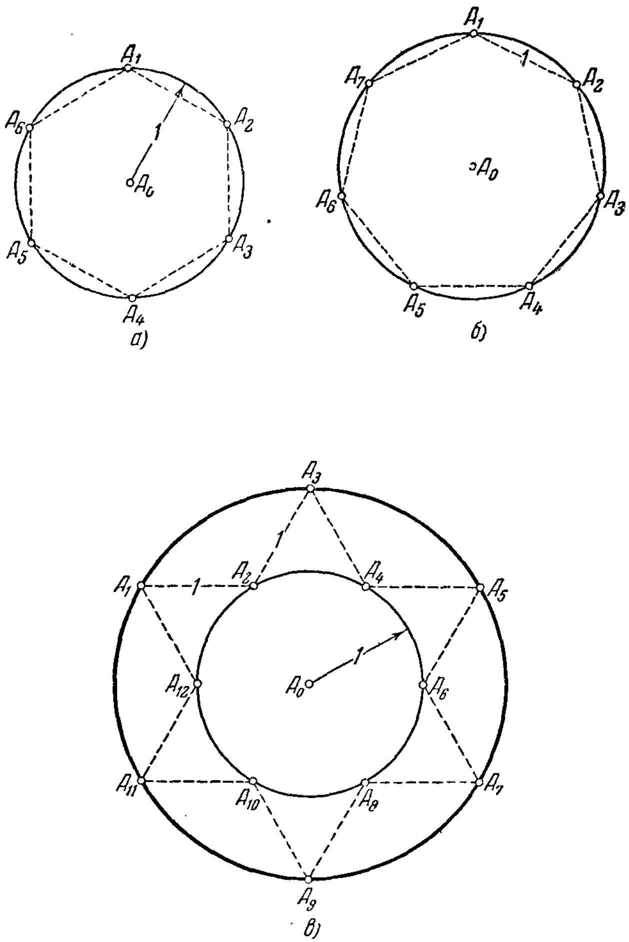
1° Совершенно очевидно, что

$$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 1$$

(внутри круга радиуса 1 можно поместить 7 точек, расстояния между каждыми двумя из которых не меньше 1; достаточно принять за эти точки центр круга и шесть вершин правильного вписанного шестиугольника; черт. 129,*а*).

2° Пусть внутри круга радиуса R расположено n точек, так что одна из точек совпадает с центром круга и расстояния между каждыми двумя из точек не меньше 1. В таком случае $n - 1$ из этих точек расположены внутри кольца с центром в n-й точке A_0, образованного окружностями радиусов 1 и R. При этом расстояние между каждыми двумя из этих $n - 1$ точек не меньше 1 и хотя бы один из углов, под которым видны из центра кольца отрезки, соединяющие эти точки, не превосходит $\frac{360°}{n-1}$. Это замечание указывает на связь настоящей задачи с предыдущей.

Если $n = 8$, $n - 1 = 7$, то наша задача сводится к тому, чтобы найти наименьшее число R такое, что внутри кольца с центром A_0 образованного окружностями радиусов 1 и R, можно расположить две точки A_1 и A_2, расстояние между которыми не меньше 1 и угол $A_1A_0A_2$ не превосходит $\frac{360°}{7}$.



A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_0
1
а)
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_0
1
б)
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_8
A_9
A_{10}
A_{11}
A_{12}
A_0
1
в)

Черт. 129.

В силу результата задачи 46 для этого необходимо, чтобы было $2\arcsin\frac{1}{2R} \geqslant \frac{360^\circ}{7}$; отсюда следует, что $R_8 = \dfrac{1}{2\sin\frac{180^\circ}{7}} = 1{,}15\ldots$ (черт. 129,*б*).

Совершенно так же находим

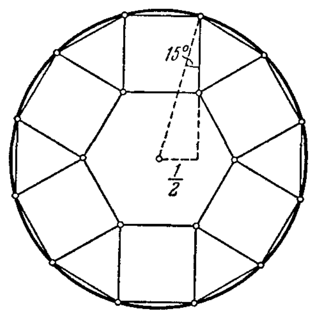
$$R_9 = \frac{1}{2\sin\frac{180^\circ}{8}} = 1{,}30\ldots, \quad R_{10} = \frac{1}{2\sin\frac{180^\circ}{9}} = 1{,}46\ldots,$$

$$R_{11} = \frac{1}{2\sin\frac{180^\circ}{10}} = 1{,}61\ldots$$

Примечание. Отметим, что при $n > 11$ мы будем иметь $R_n - \frac{1}{R_n} > 1$, и соответственно этому наиболее выгодное расположение n точек уже не будет подобно черт. 129, *б* (см. решение задачи 46). Так, например, с помощью второй из формул решения задачи 46 нетрудно вывести, что $\arccos\frac{R_{13}}{2} = \frac{360^\circ}{12}$, откуда $R_{13} = 2\cos 30^\circ = 1{,}73\ldots$; расположение 13 точек в круге радиуса $\sqrt{3}$, удовлетворяющее условию задачи, будет иметь вид, изображенный на черт. 129, *в*.

48. Решение этой задачи близко к решению предыдущей и также основывается на теореме задачи 46.

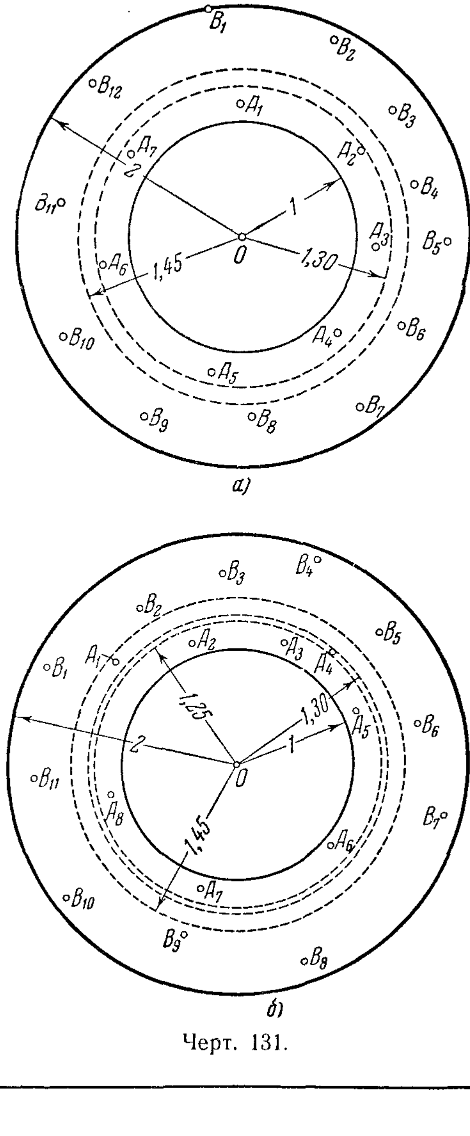
На каждой стороне длины 1 правильного шестиугольника, вне его построим квадраты (черт. 130). Вершины квадратов, не являющиеся вершинами исходного шестиугольника, служат, как легко видеть, вершинами правильного двенадцатиугольника. Радиус круга, описанного около этого двенадцатиугольника, равен $\frac{1}{2} : \sin 15^\circ = 1{,}93\ldots$ Таким образом, вершины всех квадратов вместе с центром шестиугольника образуют систему из 19 точек, которую можно заключить в круг радиуса $1{,}93\ldots$, т. е. радиуса, меньшего 2; при этом расстояние между ближайшими из этих точек равно **1**.



Черт. 130.

Покажем теперь, что 20 точек, удовлетворяющих условию задачи, никаким образом нельзя поместить внутри круга радиуса 2. В решении задачи 47 мы показали, что радиус наименьшего круга, внутри которого можно поместить 10 точек так, что одна из точек совпадает с центром круга и расстояния между каждыми двумя точками не меньше 1, равен $\frac{1}{2\sin 20^\circ}=1{,}46\ldots$ Поэтому внутри кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов 1 и 1,45, нельзя поместить девять точек, расстояния между каждыми двумя из которых не меньше 1. Точно так же можно показать, что внутри кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов 1,45 и 2, нельзя поместить 13 точек, расстояния между каждыми двумя из которых не меньше 1; угол, под которым виден из центра кольца отрезок, соединяющий какие-либо две из этих точек, не меньше $\arccos\frac{3+1{,}45)^2}{2\cdot 2\cdot 1{,}45}\approx 28{,}3^\circ$, а $13\cdot 28{,}3^\circ>360^\circ$. Отсюда следует, что если 20 точек, удовлетворяющих условию задачи, помещаются внутри круга радиуса 2, то либо семь точек помещаются внутри кольца C, образованного окружностями радиусов 1 и 1,45, а 12 точек — вне этого кольца, либо восемь точек помещаются внутри C, а 11 — вне C (20-й точкой в обоих случаях является центр O окружности). Рассмотрим отдельно оба эти случая.

1° Семь точек A_1, A_2, ..., A_7 расположены внутри кольца C, а 12 точек B_1, B_2, ..., B_{12} — вне этого кольца (черт. 131, *а*). Мы будем считать, что как первые семь точек, так и последующие 12 точек следуют друг за другом в выписанном порядке при обходе вокруг центра круга. Отметим прежде всего, что ни одна из первых семи точек не может быть расположена вне кольца, образованного окружностями радиусов 1 и 1,30. Действительно, если бы, например, точка A_1 лежала вне этого кольца, то каждый из углов A_1OB_1 и A_1OB_2, где O — центр круга, а B_1 и B_2 — две ближайшие к A_1 точки B, расположенные с разных сторон от OA_1, был бы не меньше $\arccos\frac{3+(1{,}3)^2}{2\cdot 2\cdot 1{,}3}=25{,}5^\circ\ldots$ (см. решение задачи 46). Следовательно, мы имели бы $\angle B_1OB_2>51{,}0^\circ$. Далее в силу результата задачи 46 каждый из углов B_2OB_3, B_3OB_4, ..., $B_{11}OB_{12}$, $B_{12}OB_1$ не меньше



B1
B2
B12
B3
A1
A7
A2
2
B4
B11
1
A3
B5
A6
1,45
O
1,30
B10
A4
B6
A5
B7
B9
B8
a)
B4
B3
B2
B5
A2
A3
A4
A1
B1
1,25
1,30
A5
B6
2
1
B11
O
A8
B7
1,45
A6
A7
B10
B9
B8
б)

Черт. 131.

$28{,}3^\circ$ (см. выше). Но $11\cdot 28{,}3^\circ + 51{,}0^\circ > 360^\circ$, откуда и следует наше утверждение.

Таким образом, мы можем утверждать, что 12 точек расположены вне кольца C, а семь точек — внутри меньшего кольца c, образованного окружностями радиусов 1 и 1,30. При этом в силу результата задачи 47 все последние семь точек не могут лежать внутри кольца, образованного окружностями радиусов 1 и 1,15. Пусть, например, точка A_1 лежит вне этого кольца. Далее можно показать, что хотя бы одна из шести остальных точек расположена вне кольца c', образованного окружностями радиусов 1 и 1,10: действительно, если бы все шесть точек $A_2, A_3, \ldots, A_7$ лежали внутри этого кольца, то углы A_2OA_3, $A_3OA_4, \ldots, A_6OA_7$ были бы не меньше $2\arcsin\frac{1}{2\cdot 1{,}1} \approx 54{,}0^\circ$; углы A_1OA_2 и A_1OA_7 были бы не меньше

$$2\arcsin\frac{1}{2\cdot 1{,}3} \approx 45{,}2^\circ, \text{ а } 5\cdot 54{,}0^\circ + 2\cdot 45{,}2^\circ > 360^\circ.$$

Пусть B_1 и B_2 — точки B, наиболее близкие к A_1 и расположенные с разных сторон от OA_1; в таком случае углы A_1OB_1 и A_1OB_2 не меньше $\arccos\frac{3+(1{,}15)^2}{2\cdot 2\cdot 1{,}15} \approx 20{,}0^\circ$ и угол B_1OB_2 не меньше $40{,}0^\circ$. Точно так же, используя то, что одна из остальных точек A расположена вне кольца c', можно показать, что один из углов B_1OB_2, $B_2OB_3, \ldots, B_{12}OB_1$ не меньше $2\arccos\frac{3+(1{,}1)^2}{2\cdot 2\cdot 1{,}1} \approx 2\cdot 16{,}8^\circ = 33{,}6$. Если это тот же угол B_1OB_2, который фигурировал у нас выше, то он должен быть даже не меньше чем $20{,}0^\circ + 45{,}2^\circ + 16{,}8^\circ = 82{,}0^\circ$ $\left(\text{ибо угол между каждыми двумя из точек } A \text{ не меньше } 2\arcsin\frac{1}{2\cdot 1{,}3} \approx 45{,}2^\circ\right)$; в этом случае мы приходим к противоречию, так как $11\cdot 28{,}3^\circ + 82{,}0^\circ > 360^\circ$. Если же среди углов B_1OB_2, $B_2OB_3, \ldots, B_{12}OB_1$ есть один не меньший $40{,}0^\circ$ и один не меньший $33{,}6^\circ$, то мы также сможем прийти к противоречию, если только воспользуемся тем, что в силу результата задачи 47 не более девяти из наших 20 точек могут быть расположены внутри окружности радиуса 1,60 и, следовательно, не более двух из точек B

заключаются внутри этой окружности. Поэтому по крайней мере 8 из 12 углов B_1OB_2, B_2OB_3, ..., $B_{12}OB_1$ не меньше чем $2\arcsin\frac{1}{2\cdot 2}\approx 28{,}9^\circ$. Таким образом, в этом случае сумма углов $B_1OB_2+B_2OB_3+\ldots+B_{12}OB_1$ не меньше чем $40{,}0^\circ+33{,}6^\circ+6\cdot 28{,}9^\circ+4\cdot 28{,}3^\circ>360^\circ$. Этим и заканчивается разбор случая 1°.

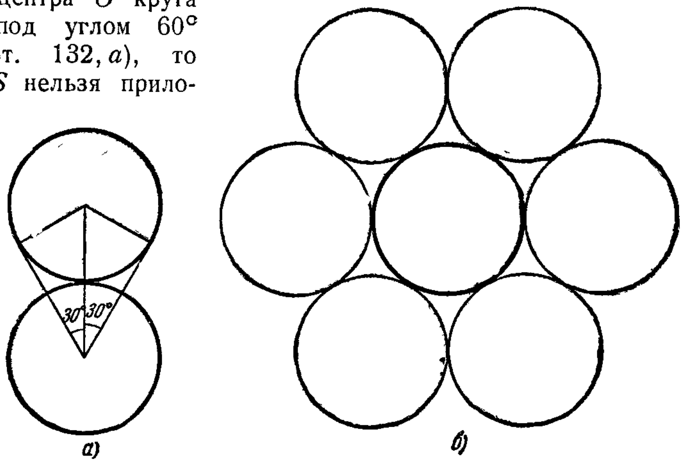
2° В о с е м ь т о ч е к A_1, A_2, ..., A_8 р а с п о л о ж е н ы в н у т р и к о л ь ц а C, а 11 т о ч е к $B_1, B_2, \ldots, B_{11}$ — в н е э т о г о к о л ь ц а (черт. 131, *б*). При этом в силу результата задачи 47 все восемь точек A не могут быть расположены внутри круга радиуса 1,30: хотя бы одна из этих точек (будем считать, что это A_1) находится вне этого круга. Далее совершенно аналогично тому, как мы рассуждали при разборе случая 1°, можно показать, что из восьми точек A не менее д в у х лежат вне круга радиуса 1,25 $\Big($это следует из того, что $6\cdot 2\arcsin\frac{1}{2\cdot 1{,}25}+2\cdot 2\arcsin\frac{1}{2\cdot 1{,}45}\approx 6\cdot 47{,}1^\circ+2\cdot 40{,}3^\circ>$ $>360^\circ\Big)$; значит, кроме A_1 еще какая-то из точек A лежит вне этого круга. Наконец, точно так же покажем, что из восьми точек A не менее т р е х лежат вне круга радиуса 1,15 $\Big($это следует из того, что $4\cdot 2\arcsin\frac{1}{2\cdot 1{,}15}+$ $+4\cdot 2\arcsin\frac{1}{2\cdot 1{,}45}\approx 4\cdot 51{,}5^\circ+4\cdot 40{,}3^\circ>360^\circ\Big)$; следовательно, кроме точек, упомянутых выше, еще одна точка A лежит вне этого круга.

Пусть теперь B_1 и B_2 — точки B, наиболее близкие к точке A_1 и расположенные с обеих сторон от OA_1; в таком случае углы A_1OB_1 и A_1OB_2 не меньше чем $\arccos\frac{3+(1{,}3)^2}{2\cdot 2\cdot 1{,}3}\approx$ $\approx 25{,}5^\circ$ и угол B_1OB_2 не меньше $51{,}0^\circ$. Точно так же, используя то, что еще одна из точек A лежит вне круга радиуса 1,25 и одна — вне круга радиуса 1,15, можно показать, что один из углов B_1OB_2, B_2OB_3, ..., $B_{12}OB_1$ не меньше $2\arccos\frac{3+(1{,}25)^2}{2\cdot 2\cdot 1{,}3}\approx 2\cdot 24{,}1^\circ=48{,}2^\circ$. Если какие-либо два из этих трех «больших» углов совпадают, то соответствующий угол не меньше чем $20{,}0^\circ+24{,}1^\circ+40{,}3^\circ=84{,}4^\circ$

(ибо каждый из углов A_1OA_2, $A_2OA_3, \ldots, A_8OA_7$ не меньше чем $2 \arcsin \frac{1}{2 \cdot 1{,}45} \approx 40{,}3^\circ$); в этом случае мы приходим к противоречию, так как $10 \cdot 28{,}3^\circ + 84{,}4^\circ > 360^\circ$. Если же из углов B_1OB_2, $B_2OB_3, \ldots, B_{12}OB_1$ один не меньше $51{,}0^\circ$, другой $48{,}2^\circ$ и третий $48{,}2^\circ$, то мы снова приходим к противоречию, так как $51{,}0^\circ + 48{,}2^\circ + 40{,}0^\circ + 8 \cdot 28{,}3^\circ > 360^\circ$. Этим заканчивается разбор случая 2°.

Таким образом, наибольшее число точек, которые можно расположить с соблюдением условий задачи, равно 19.

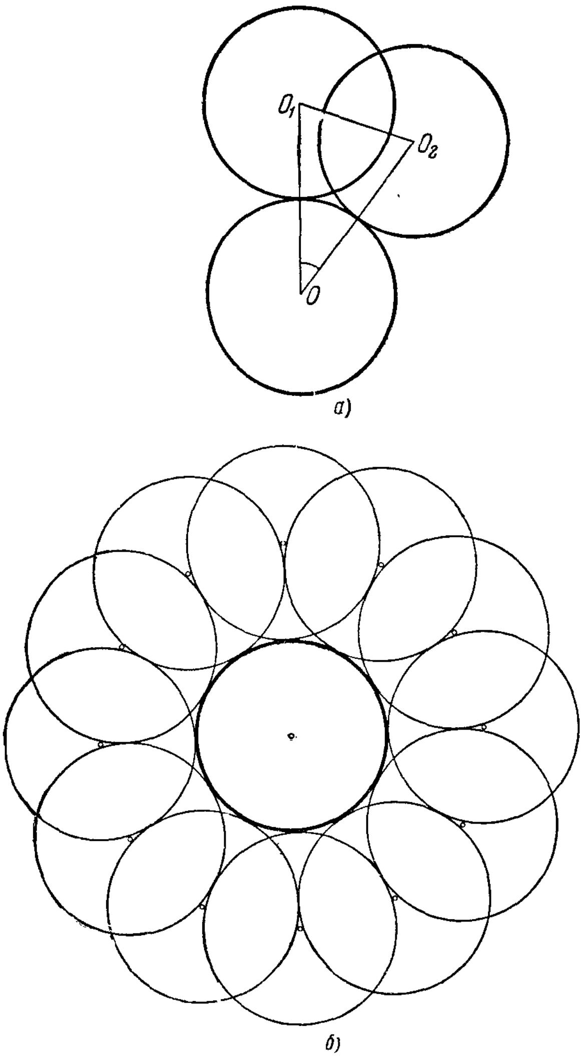
49. Так как единичный круг, касающийся S, виден из центра O круга S под углом 60° (черт. 132, *а*), то к S нельзя прило-



Черт. 132.

жить больше $6 \left(= \frac{360^\circ}{60^\circ}\right)$ непересекающихся единичных кругов. Шесть кругов, очевидно, приложить можно (черт. 132, *б*).

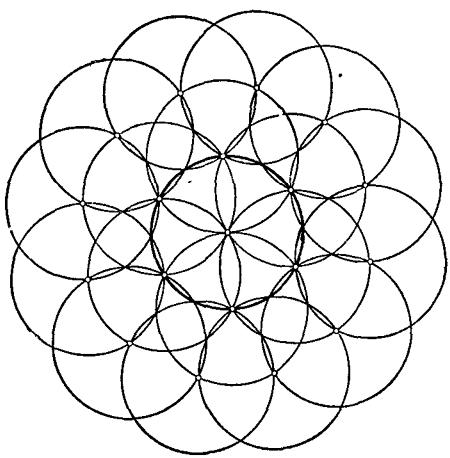
Далее, если O_1 и O_2 — центры двух приложенных к S единичных кругов C_1 и C_2 таких, что O_1 не лежит внутри C_2, а O_2 не лежит внутри C_1 (черт. 133, *а*), то $O_1O_2 \geqslant 1$, $OO_1 = OO_2 = 2$ и $\angle O_1OO_2 \geqslant 2 \arcsin \frac{1}{4} \approx 29{,}0^\circ$. Отсюда вытекает, что к S можно приложить не больше 12 (12 есть



Черт. 133.

целая часть дроби $\left.\frac{360^\circ}{29{,}0^\circ}\right)$ единичных кругов так, что ни один из них не будет содержать внутри себя центр другого круга; 12 кругов, очевидно, приложить можно (черт. 133, *б*).

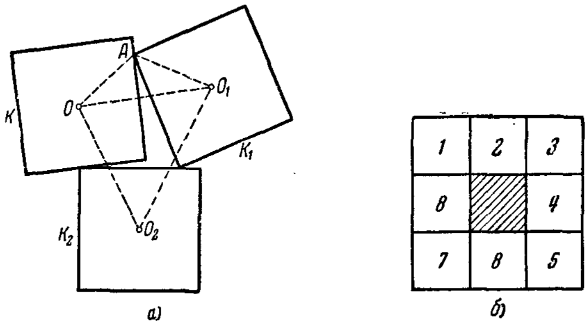
50. На черт. 134 показано, что 18 кругов, удовлетворяющих условию задачи, разместить можно (шесть кругов черт. 134 имеют центры в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в S, остальные 12 — в вершинах квадратов, построенных на сторонах вписанного шестиугольника вне его; ср. с черт. 130). То, что больше 18 кругов разместить нельзя, следует из результата задачи 48: в противном случае центры всех кругов (включая центр O круга S) образовывали бы систему из 20 или больше точек, заключенных внутри круга радиуса 2 с центром в одной из этих точек O и таких, что расстояние между каждыми двумя из этих точек не меньше 1, в то время как в силу теоремы задачи 48 такой системы точек не может существовать.



Черт. 134.

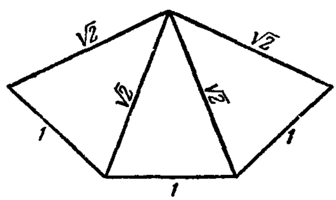
51. Первое решение. Пусть O — центр основного квадрата K, O_1 и O_2 — центры приложенных к нему непересекающихся квадратов K_1 и K_2 (черт. 135, *а*). Так как наименьшее расстояние от центра единичного квадрата до его границы равно $\frac{1}{2}$, то отрезки OO_1, OO_2, O_1O_2 не меньше 1. Далее, так как квадраты K и K_1 соприкасаются в некоторой точке A, то $OO_1 \leqslant OA + O_1A \leqslant \sqrt{2}$ (ибо наибольшее расстояние от центра единичного квадрата до его границы равно

$\left.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Следовательно, точки O_1 и O_2 лежат внутри кольца с центром O, ограниченного окружностями радиусов 1 и $\sqrt{2}$; а так как $O_1O_2 \geqslant 1$, то угол O_1OO_2 в силу результата задачи 46 не меньше $2\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 41{,}4^\circ$. Отсюда



Черт. 135.

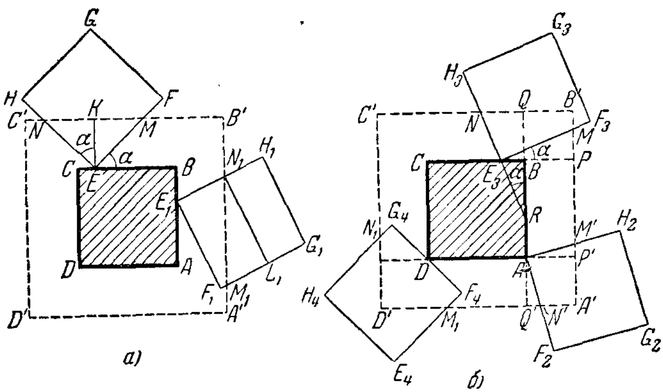
следует, что к квадрату K нельзя приложить больше восьми непересекающихся единичных квадратов, так как $9 \cdot 41{,}4^\circ > 360^\circ$. То, что восемь квадратов приложить можно, следует из черт. 135, *б*.



Черт. 136.

Примечание. Эту задачу можно также решить, не пользуясь тригонометрическими таблицами. $2\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$ есть угол при вершине равнобедренного треугольника с боковыми сторонами $\sqrt{2}$ и основанием 1. Приложим друг к другу девять таких треугольников так, как это указано на черт. 136. Сумма длин оснований всех этих треугольников будет превосходить длину окружности радиуса $\sqrt{2}$: действительно, $2\pi\sqrt{2} < 2 \cdot 3{,}142 \cdot 1{,}42 < 8{,}93 < 9$. Отсюда вытекает, что $9 \cdot 2\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} > 360^\circ$, а это нам и требовалось показать.

Второе решение. Пусть $ABCD$ — исходный квадрат K; длину его стороны мы примем за единицу. Рассмотрим квадрат $A'B'C'D'$ со стороной 2, имеющий общий центр с квадратом K и те же направления сторон (черт. 137, *а*); периметр квадрата $A'B'C'D'$, очевидно, равен 8. Покажем, что длина l части периметра квадрата $A'B'C'D'$ высекаемой стороной одного прикладываемого квадрата не может быть меньше 1; отсюда будет следовать, что к K нельзя приложить больше восьми не налегающих друг на друга квадратов. Рассмотрим все возможные положения приложенного квадрата.



Черт. 137.

1° Пусть ни одна из вершин квадрата $A'B'C'D'$ не попадает внутрь приложенного квадрата (случаи квадратов $EFGH$ и $E_1F_1G_1H_1$ на черт. 137, *а*). Если при этом лишь одна вершина приложенного квадрата попадает внутрь квадрата $A'B'C'D'$ (как в случае квадрата $EFGH$), то, обозначив угол между сторонами BC и EF через α, будем иметь

$$l = MK + KN = EK\operatorname{tg}\alpha + EK\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}\right)^2 \geqslant 1.$$

Если же две вершины приложенного квадрата попадут внутрь квадрата $A'B'C'D'$ (как в случае квадрата $E_1F_1G_1H_1$), то, очевидно, $l = M_1N_1 \geqslant N_1L_1 = 1$.

2° Пусть одна из вершин квадрата $A'B'C'D'$ попадет внутрь приложенного квадрата (квадраты $AF_2G_2H_2$, $E_3F_3G_3H_3$ и $E_4F_4G_4H_4$ на черт. 137, *б*). Если приложенный квадрат своей вершиной примыкает к квадрату $ABCD$ в отличной от вершины точке границы (случай квадрата $E_3F_3G_3H_3$), то

$$l = MB' + B'N = (PB' + B'Q) + (QN - PM) = \\ = 1 + (QN - PM).$$

Но (черт. 137, *б*)

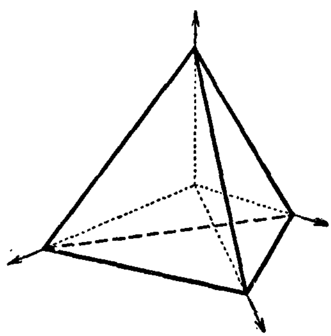
$$PM = E_3P \operatorname{tg} \alpha, \quad QN = RQ \operatorname{tg} \alpha, \quad RQ - E_3P = RB - E_3B \geqslant 0,$$

так как $\alpha \leqslant 45°$. Следовательно, $QN > PM$ и $l > 1$. Эти же рассуждения применимы в том случае, когда приложенный квадрат примыкает вершиной к вершине квадрата $ABCD$ (случай квадрата $AF_2G_2H_2$); в этом случае только $P'M' = Q'N'$ и, следовательно, $l = M'A' + A'N' = 1$. Наконец, если приложенный квадрат примыкает к вершине квадрата $ABCD$ стороной (случай квадрата $E_4F_4G_4H_4$), то

$$l = M_1D' + D'N_1 > M_1N_1 \geqslant G_4F_4 = 1.$$

Таким образом, во всех случаях длина части MN периметра $A'B'C'D'$ действительно не может быть меньше 1.

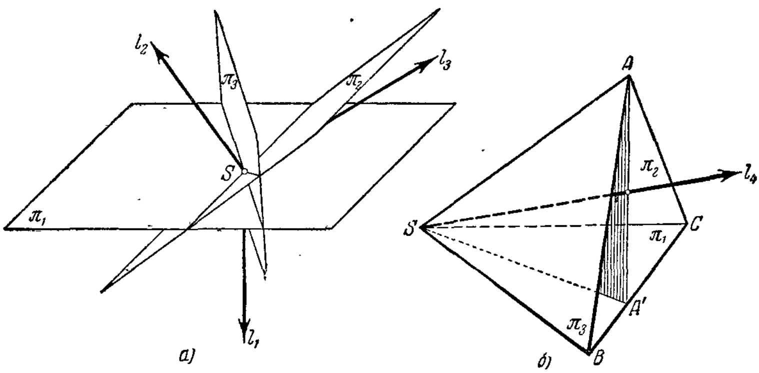
52. Возьмем правильный тетраэдр и из его центра проведем лучи через его вершины (черт. 138); мы получим четыре луча, образующих попарно тупые углы. Действительно, плоскость, проведенная через центр перпендикулярно к какому-нибудь лучу, параллельна противоположной грани и отделяет его от остальных лучей. Следовательно, угол между любыми двумя лучами больше прямого.



Черт. 138.

Покажем теперь, что не может быть больше четырех лучей, образующих попарно тупые углы. Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 — четыре таких луча, выходящих из одной точки S, π_1, π_2, π_3, π_4 — плоскости, проходящие через точку S и перпендикулярные соответственно к лучам l_1, l_2, l_3, l_4.

Возьмем луч l_1 (черт. 139, *а*). Все лучи, образующие с ним тупые углы, должны лежать по другую сторону плоскости π_1. Все лучи, образующие тупые углы с лучами l_1 и l_2, должны лежать внутри двугранного угла, образованного полуплоскостями π_1 и π_2. Этот двугранный угол острый, так как угол между перпендикулярными к его граням лучами тупой. Все лучи, образующие тупые углы с каждым из лучей l_1, l_2, l_3, должны лежать внутри пересечения двугранных углов $\pi_1\pi_2$ и $\pi_1\pi_3$. Это пересечение — трехгранный угол $\pi_1\pi_2\pi_3$

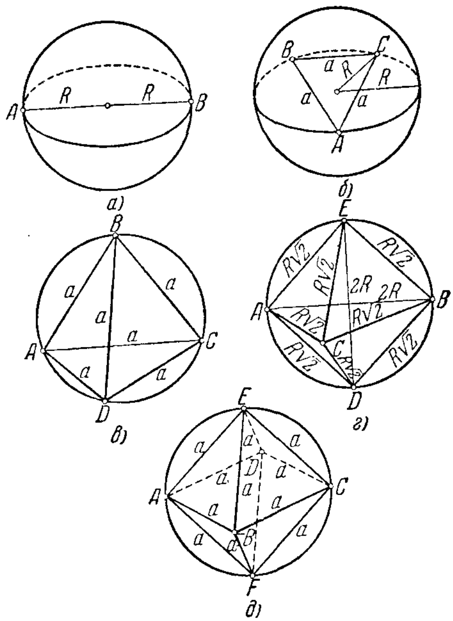


Черт. 139.

(черт. 139, *б*), у которого по доказанному выше все двугранные углы острые. Луч l_4 должен лежать внутри него. Покажем, что он образует острые углы со всеми остальными лучами внутри этого угла. Обозначим ребра рассматриваемого трехгранного угла через SA, SB и SC. Проведем плоскость через SA и луч l_4. Она пересечется с гранью BSC по лучу SA'. Один из двугранных углов с ребром SA' острый; пусть это для определенности угол $ASA'C$. Тогда все двугранные углы трехгранного угла $SAA'C$ острые. Следовательно, все плоские углы тоже острые (см. Б. Делоне и О. Житомирский, Задачник по геометрии, решение задачи 348). Но $\angle ASl_4$ составляет только часть угла ASA', следовательно, угол между лучами SA и l_4 острый. Аналогично, луч l_4 образует острые углы с SB и SC. Поэтому все три луча SA, SB, SC лежат по одну сторону с лучом l_4 от плоскости π_4. Поэтому и все внутренние точки трехгранного угла $SABC$ лежат по ту же сторону π_4, что и луч l_4. Следовательно, каждый луч l_5, расположенный внутри трехгранного угла $\pi_1\pi_2\pi_3$, лежит по ту же сторону от плоскости π_4 и значит никакой такой луч l_5 не может образовать тупой угол с l_4. Этим и доказывается требуемое утверждение.

53. Рассмотрим последовательно случаи $n=2$, 3, 4, 5 и 6.

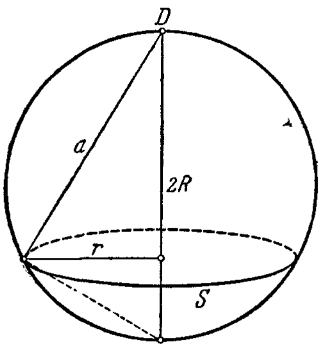
1° $n=2$. Очевидно, что в этом случае наиболее выгодным будет поместить две точки в диаметрально противоположных точках сферы (черт. 140, *а*). Расстояние между этими точками будет равно диаметру $2R$ сферы.



Черт. 140.

2° $n=3$. Плоскость, проведенная через какие-либо три точки сферы, пересекает сферу по окружности S. Для того чтобы наименьшее из расстояний между всевозможными парами из трех точек было наибольшим, необходимо, чтобы эти точки располагались в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в окружность S; при этом расстояние между каждыми двумя точками будет равно $r\sqrt{3}$, где r — радиус окружности S. Но радиус r окружности S, полученной в сечении сферы, не может быть больше радиуса R сферы, причем $r=R$ только в том случае, если плоскость сечения проходит через центр сферы (S есть большая окружность сферы). Отсюда следует, что наиболее выгодным расположением трех точек будет такое, при котором они помещаются в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в большую окружность сферы (черт. 140, *б*); расстояние между каждыми двумя точками в этом случае равно $R\sqrt{3}$.

3° $n=4$. Обозначим наши четыре точки через A, B, C и D. Рассмотрим следующую задачу: расположить на сфере радиуса R четыре точки A, B, C и D так, чтобы расстояние от D до остальных трех точек было бы не меньше заданной величины a и наименьшее из попарных расстояний между точками A, B и C (обозначим его через b) было бы возможно большим. Так как по условию расстояния DA, DB и DC не меньше a, то точки A, B и C находятся вне области данной сферы, высекаемой шаром *Ш* радиуса a с центром в точке D. Отсюда аналогично случаю 2° можно заключить, что точки A, B и C следует расположить в вершинах равностороннего треугольника, причем описанная около этого треугольника окружность S должна быть большой окружностью сферы, если $a \leqslant R\sqrt{2}$, и должна совпадать с окружностью, по которой шар *Ш* пересекает сферу, если $a \geqslant R\sqrt{2}$ (R есть радиус сферы). При этом, очевидно, в первом случае $b=R\sqrt{3}$, а во втором $b=r\sqrt{3}$, где r есть радиус окружности S.



Черт. 141.

Теперь остается только найти такое значение a, при котором наименьшее из расстояний a, b было бы возможно большим. Но нетрудно видеть, что если $a \geqslant R\sqrt{2}$, то

$$a^2 = 2R\sqrt{a^2 - r^2}$$

(черт. 141); отсюда получаем

$$r^2 = \frac{4R^2a^2 - a^4}{4R^2} = R^2 - \frac{(2R^2 - a^2)^2}{4R^2};$$

далее, так как $b = r\sqrt{3}$, то

$$b^2 = 3r^2 = 3R^2 - \frac{3(2R^2 - a^2)^2}{4R^2}.$$

Из последней формулы вытекает, что если

$$a^2 = \frac{8}{3}R^2,$$

то

$$b^2 = \frac{8}{3}R^2,$$

если

$$a^2 > \frac{8}{3}R^2,$$

то

$$b^2 < \frac{8}{3}R^2.$$

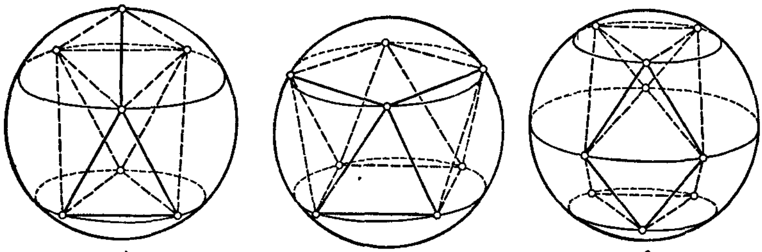
Отсюда следует, что решением задачи будут служить четыре точки A, B, C и D, расположенные на сфере на равных расстояниях друг от друга:

$$AB = AC = AD = BC = CD = \sqrt{\frac{8}{3}}R,$$

т. е. четыре точки, расположенные в вершинах правильного тетраэдра, вписанного в сферу (черт. 140, *в*).

4° $n = 5$, 6. Отметим прежде всего, что на сфере радиуса R нельзя расположить больше четырех точек так, чтобы расстояние между каждыми двумя из этих точек было больше $R\sqrt{2}$; это утверждение, очевидно, равносильно утверждению предыдущей задачи. Отсюда следует, что решение задачи в случаях $n = 5$ и $n = 6$ будет даваться такими расположениями точек, при которых наименьшее из попарных расстояний между точками равно $R\sqrt{2}$. В случае $n = 6$ имеется единственное подобное расположение, даваемое черт. 140, *д* (шесть точек в вершинах правильного октаэдра, вписанного в сферу); в случае $n = 5$ можно найти бесконечно много таких расположений (см., например, черт. 140, *г*, где восемь из попарных расстояний между точками равны $R\sqrt{2}$, а два — равны $2R$).

Примечание. Для случаев $n=7, 8, 9$ наиболее выгодное (в смысле настоящей задачи) расположение n точек на сфере дается на черт. 142, *а* — *в* (на этих чертежах соединены между собой жирными линиями точки системы, наиболее близкие друг к другу).

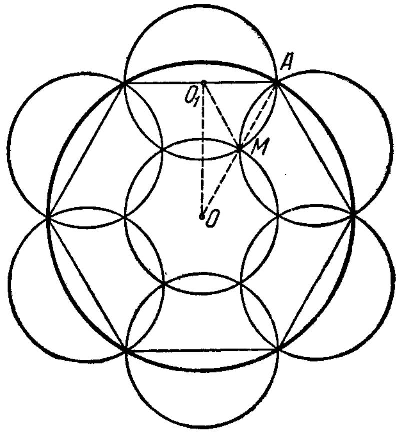


а) б) в)

Черт. 142.

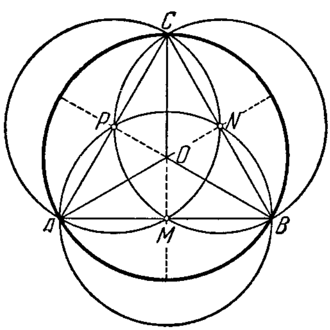
Для $n > 9$ решение задачи не известно (за исключением единственного случая $n = 12$, когда самое выгодное расположение точек дается вершинами вписанного икосаэдра).

54. Так как диаметр меньших кругов равен радиусу R большого круга, то каждый такой круг пересекает окружность большого круга в точках, отстоящих друг от друга не больше чем на R, и, следовательно, покрывает дугу этой окружности, не бóльшую, чем 60°. Отсюда следует, что для того, чтобы покрыть всю окружность большого круга, требуется не меньше шести маленьких кругов; при этом шести кругов оказывается достаточно только в том случае, когда эти круги имеют диаметрами шесть сторон правильного шестиугольника, вписанного в большую окружность, а во всех остальных случаях требуется не меньше семи кругов. Но если окружность большого круга покрыта шестью кругами, то требуется еще не меньше одного маленького круга, чтобы покрыть оставшуюся часть большого круга (ибо первые шесть кругов не покрывают, например, центр большого круга). При этом одного круга оказывается достаточно для того, чтобы покрыть оставшуюся часть большого круга (черт. 143; из того, что $O_1M = \frac{1}{2}R$, следует, что O_1M есть медиана прямоугольного треугольника OO_1A с углом в 30° и, следовательно, $OM = \frac{1}{2} R\Big)$. Таким образом, мы убеждаемся, что наименьшее число кругов радиуса $\frac{1}{2} R$, которыми можно покрыть круг радиуса R, равно 7.



Черт. 143.

55. Пусть радиус площади равен R, а наибольшее расстояние от точки площади до ближайшего киоска равно r. В таком случае каждая точка площади будет находиться на расстоянии, не большем r, хотя бы от одного киоска, т. е. три круга радиуса r с центрами в точках расположения киосков полностью покроют всю площадь. Обратно, если вся площадь покрыта тремя кругами радиуса r, то, поместив киоски в центрах этих кругов, мы сможем быть уверены, что расстояние от каждой точки площади до ближайшего киоска не превышает r. Отсюда следует, что наша задача равносильна следующей: покрыть круг радиуса R тремя равными кругами возможно меньшего радиуса.



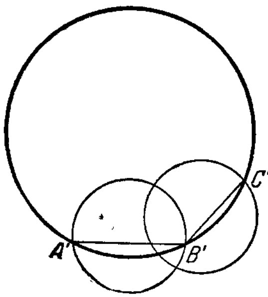
Черт. 144.

Разделим круг радиуса R тремя радиусами на три равных сектора OAB, OBC и OCA с центральными углами в 120° (черт. 144). Наименьшим кругом, покрывающим сектор OAB, является круг с центром в середине M хорды AB (так как наименьшим кругом, покрывающим тупоугольный треугольник OAB, является круг, построенный на наибольшей стороне, как на диаметре; см. решение задачи 18). Построим три таких круга, покрывающих секторы OAB, OBC и OCA; эти три круга радиуса $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ покрывают, очевидно, весь круг радиуса R.

Мы утверждаем, что круг радиуса R нельзя покрыть тремя кругами меньшего радиуса.

Действительно, пусть один из кругов радиуса, меньшего $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, пересекает окружность большого круга в точках A' и B'; тогда $A'B' < R\sqrt{3}$ (так как диаметр этого круга меньше $R\sqrt{3}$) и, следовательно,

$$\smile A'B' < 120^\circ$$



Черт. 145.

(черт. 145). Второй из кругов радиуса, меньшего $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, покрывающий точку B', также должен пересечь второй раз окружность большого круга в точке C' такой, что

$$\smile B'C' < 120^\circ.$$

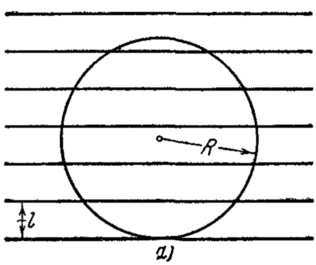
Но отсюда следует, что $\smile C'A' > 120^\circ$ и, следовательно, эта дуга не может быть покрыта одним кругом диаметра, меньшего $R\sqrt{3}$, что и доказывает наше утверждение.

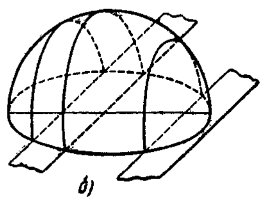
Итак, наиболее выгодным расположением киосков является такое, при котором они находятся в серединах сторон правильного треугольника, вписанного в контур площади (другими словами, киоски находятся на трех радиусах площади, образующих друг с другом углы в 120°, на расстоянии от центра, равном половине радиуса площади; см. черт. 144).

Примечание. Рекомендуем читателю самому попытаться решить аналогичную задачу для случая $n > 3$ киосков. Так, для случая $n = 4$ наиболее выгодным оказывается расположение киосков в серединах сторон квадрата, вписанного в контур площади (доказательство аналогично решению настоящей задачи); для случая $n = 7$ наиболее выгодным оказывается расположение киосков в серединах сторон шестиугольника, вписанного в контур площади, и в центре площади (ср. с решением задачи 54) и т. д.

56. Пусть k есть наименьшее целое число такое, что $kl \geqslant 2R$[1]). Приложим k полос краями друг к другу и положим на образовавшуюся широкую полосу данный круг так, чтобы он касался одной ее границы. Тогда круг будет лежать целиком внутри получившейся полосы (черт. 146, *а*). Мы утверждаем, что меньшим, чем k, числом полос ширины l круг покрыть нельзя.

Для доказательства построим полусферу, экватором которой служит данный круг (черт. 146, *б*). Рассмотрим теперь произвольное покрытие круга полосами. Через границы полос проведем плоскости перпендикулярно к плоскости круга до





Черт. 146.

пересечения с полусферой. Каждой полоске покрытия будет соответствовать на полусфере полупояс высоты l или полусегмент высоты $\leqslant l$; соответствующие всем полоскам полупояса и полусегменты целиком покрывают полусферу. Обратно, пусть дано некоторое покрытие полусферы полупоясами высоты l и полусегментами высоты $\leqslant l$. Спроектировав ортогонально эти полупояса и полусегменты на плоскость данного круга, получим покрытие круга полосками ширины l (мы считаем, что сегменты высоты меньше l отвечают полосам ширины l, лишь один край которых пересекает круг). Поэтому мы можем переформулировать задачу так: *каким наименьшим числом полупоясов высоты l и полусегментов*

---

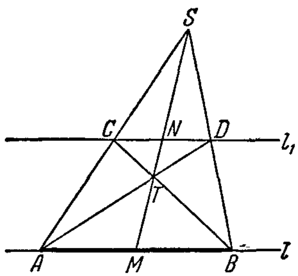
[1]) При этом $k = \left[\frac{2R}{l}\right] + 1$, если $\frac{2R}{l}$ не есть число целое, и $k = \frac{2R}{l}$, если $\frac{2R}{l}$ целое (знаком $[a]$ обозначается целая часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не большее a; см. ч. I настоящей книги, стр. 19).

высоты $\leqslant l$ можно покрыть полусферу. Но очевидно, что сумма поверхностей всех этих полупоясов и полусегментов не может быть меньше поверхности сферы. Так как поверхность полупояса или полусегмента высоты l равна πRl (напоминаем, что поверхность сферического пояса зависит только от высоты, но не от расположения пояса на сфере), а поверхность полусферы равна $2\pi R^2$, то очевидно, что если число k полупоясов и полусегментов таково, что

$$k\pi Rl < 2\pi R^2, \quad kl < 2R,$$

то этими k полупоясами и полусегментами полусферу покрыть нельзя, что и требовалось доказать.

57. а) Произвольную точку S плоскости соединим с концами AB данного отрезка (черт. 147). Пусть C и D — соответственно точки пересечения прямых SA и SB с прямой l_1; T — точка пересечения прямых AD и BC. В таком случае прямая ST делит отрезок AB на две равные части.



Черт. 147.

Действительно, пусть M и N — точки пересечения прямой ST соответственно с l и l_1. Из подобия треугольников SAM и SCN, SBM и SDN следует

$$\frac{AM}{CN} = \frac{SM}{SN}, \quad \frac{BM}{DN} = \frac{SM}{SN},$$

т. е.

$$\frac{AM}{CN} = \frac{BM}{DN}. \qquad (*)$$

Из подобия треугольников AMT и DNT, BMT и CNT имеем

$$\frac{AM}{DN} = \frac{MT}{NT}, \quad \frac{BM}{CN} = \frac{MT}{NT},$$

т. е.

$$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN}. \qquad (**)$$

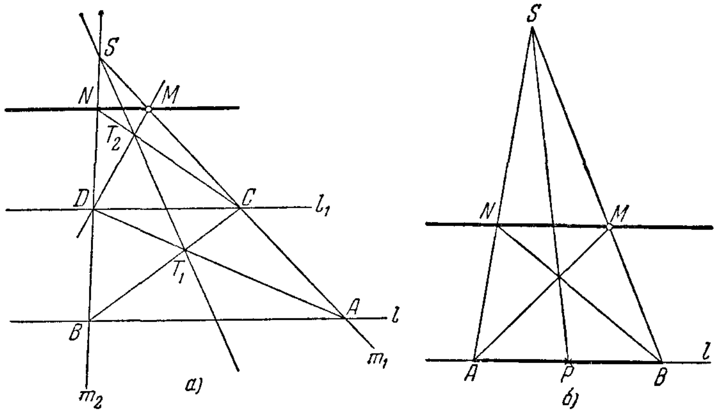
Перемножая равенства (*) и (**), получаем:

$$AM = BM,$$

что и требовалось доказать.

б) Пусть m_1 есть произвольная прямая, проходящая через точку M, A и C — соответственно точки пересечения прямой m_1 с прямыми l и l_1, S — произвольная точка прямой m_1, m_2 — некоторая другая прямая, проходящая через точку S, пересекающая прямые l и l_1 соответственно в точках B и D (черт. 148, *а*). Далее, пусть T_1 есть точка пересечения прямых AD и BC, T_2 — точка пересечения прямых MD и ST_1 и N — точка пересечения прямых m_2 и CT_2. В таком случае прямая MN параллельна l (и l_1).

Действительно, прямая ST_2T_1 делит пополам отрезки AB и CD (см. решение задачи 57 а)). Отсюда следует, что если



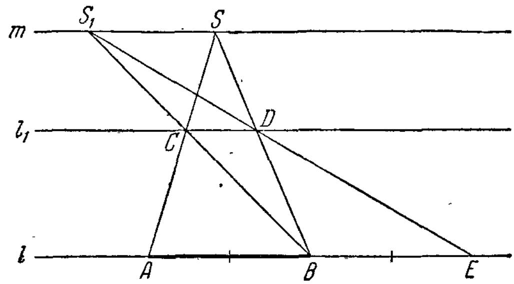
Черт. 148.

N' есть точка пересечения прямой m_2 с искомой прямой MN' (параллельной l_1), то прямые MD и $N'C$ пересекаются на прямой ST_2 (м. решение той же задачи), т. е. в точке T_2. Но последнее и означает, что точка N' совпадает с N.

Примечание. Отметим, что это же построение позволяет с помощью одной линейки провести через данную точку M прямую, параллельную данной прямой l, если только на прямой l имеется некоторый отрезок AB, середина P которого известна (черт. 148, *б*).

в) Пусть S — произвольная точка плоскости и пусть прямые SA и SB пересекают прямую l_1 соответственно в точках C и D (черт. 149). Проведем через точку S прямую $m \parallel l$ (см. решение задачи б)). Пусть S_1 — точка пересечения прямых BC и m, а E — точка пересечения S_1D с прямой l. Тогда $BE = AB$.

В самом деле, если расстояния от прямой m до прямых l и l_1 равны соответственно h и h_1, то из подобия треуголь-

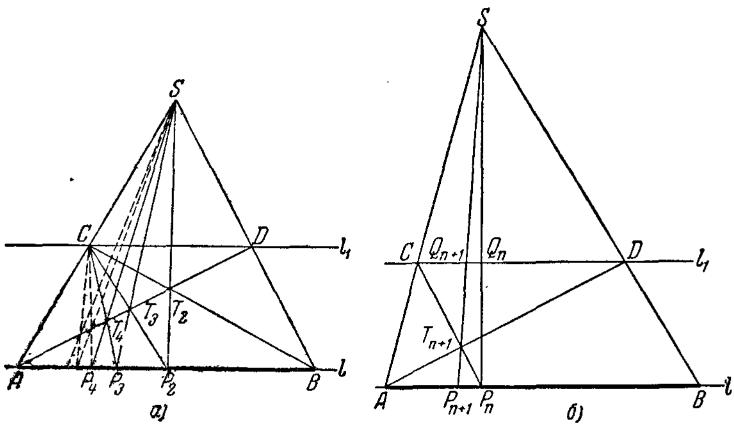


Черт. 149.

ников ASB и CSD и треугольников BS_1E и CS_1D имеем

$$\frac{AB}{CD} = \frac{h}{h_1}, \quad \frac{BE}{CD} = \frac{h}{h_1},$$

откуда и получаем $AB = BE$. Продолжая это построение,



Черт. 150.

можно последовательно отложить на прямой l отрезок AB 3, 4, ..., n раз.

г) Пусть S — произвольная точка плоскости, прямые SA и SB пересекают прямую l_1 соответственно в точках C и D; прямая AD пересекает прямую BC в точке T_2 и прямая ST_2 пересекает l в точке P_2; прямая CP_2 пересекает прямую AD в точке T_3 и прямая ST_3 пересекает прямую l в точке P_3 и т. д. (черт. 150, *а*). В таком случае $AP_2=\frac{1}{2}AB$ (см. решение задачи 57а)). Покажем, что

$$AP_3=\frac{1}{3}AB,\quad AP_4=\frac{1}{4}AB,\ \ldots \text{ и т. д.}$$

Доказательство будем вести по принципу математической индукции, т. е. предположим, что нам уже известно, что $AP_n=\frac{1}{n}AB$, и докажем, что $AP_{n+1}=\frac{1}{n+1}AB$ (черт. 150,*б*). Пусть прямые SP_n и SP_{n+1} пересекают прямую l_1 соответственно в точках Q_n и Q_{n+1}. Из подобия треугольников $CT_{n+1}Q_{n+1}$ и $P_nT_{n+1}P_{n+1}$, $CT_{n+1}D$ и $AT_{n+1}P_n$ имеем

$$\frac{CQ_{n+1}}{P_nP_{n+1}}=\frac{CT_{n+1}}{P_nT_{n+1}}=\frac{CD}{AP_n}\quad\text{или}\quad\frac{CQ_{n+1}}{AP_n-AP_{n+1}}=\frac{CD}{AP_n}.\qquad(*)$$

Далее, как легко видеть, $\frac{CQ_{n+1}}{AP_{n+1}}=\frac{SC}{SA}=\frac{CD}{AB}$, или (так как, по предположению индукции, $AB=nAP_n$)

$$\frac{CQ_{n+1}}{AP_{n+1}}=\frac{CD}{nAP_n}.$$

Отсюда

$$\frac{nCQ_{n+1}}{AP_{n+1}}=\frac{CD}{AP_n}.\qquad(**)$$

Сопоставляя равенства (*) и (**), получаем

$$\frac{CQ_{n+1}}{AP_n-AP_{n+1}}=\frac{nCQ_{n+1}}{AP_{n+1}},$$

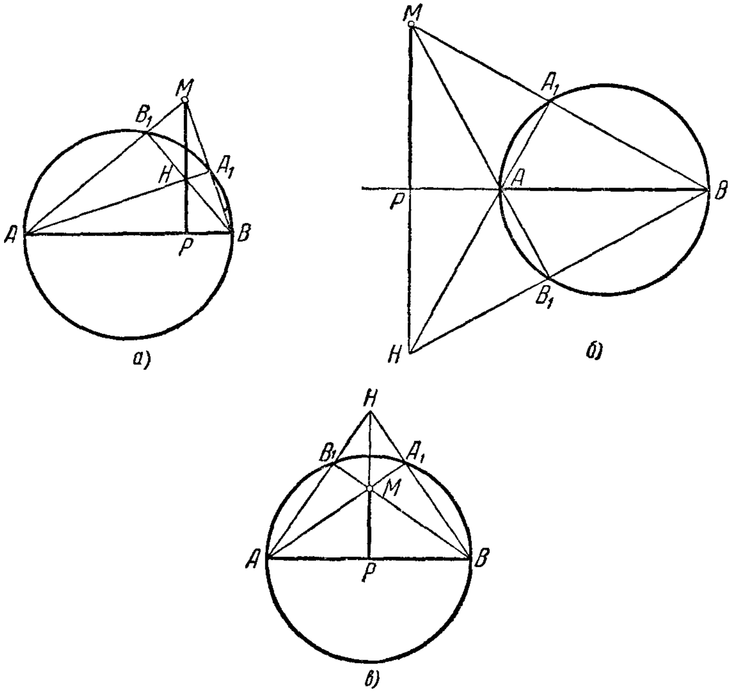
откуда

$$n(AP_n-AP_{n+1})=AP_{n+1},\quad (n+1)AP_{n+1}=nAP_n,$$

$$AP_{n+1}=\frac{n}{n+1}AP_n=\frac{1}{n+1}AB,$$

что и требовалось доказать.

58. Пусть данная точка M расположена не на окружности и не на диаметре. Соединим точку M с точками A и B. Пусть A_1, B_1 — точки пересечения прямых MB и MA с окружностью (черт. 151, *а*, *б*, *в*). Тогда угол $AB_1B = 90°$, ибо

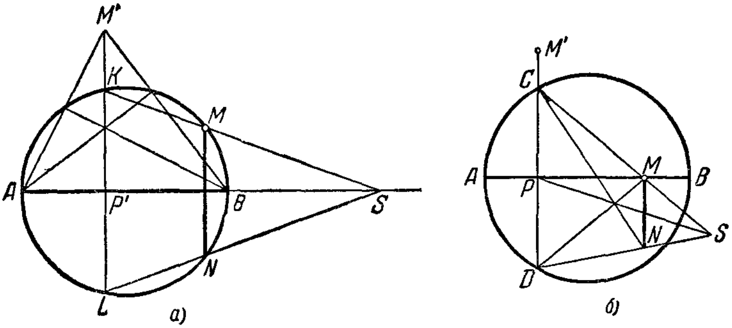


Черт. 151.

он опирается на диаметр. Угол AA_1B также равен $90°$. Следовательно, в треугольнике AMB прямые BB_1 и AA_1 — высоты.

Пусть H — точка пересечения прямых BB_1 и AA_1. Так как три высоты треугольника пересекаются в одной точке, то MH — также высота, т. е. $MH \perp AB$. Отсюда вытекает построение. Соединяем M с A и с B. Проводим прямые BB_1 и AA_1; пусть H — точка пересечения этих прямых. В таком случае прямая MH — искомая.

Если точка M расположена на окружности (черт. 152, *а*), то, используя предыдущее построение, опускаем перпендикуляр $M'P'$ из произвольной точки M' на диаметр, причем так, чтобы прямая $M'P'$ пересекала окружность. Если K и L — точки пересечения прямой $M'P'$ с окружностью, S — точка пересечения прямой MK с диаметром и N — точка пересечения LS с окружностью, то MN есть искомый перпендикуляр. Доказательство последнего почти очевидно и предоставляется читателю.

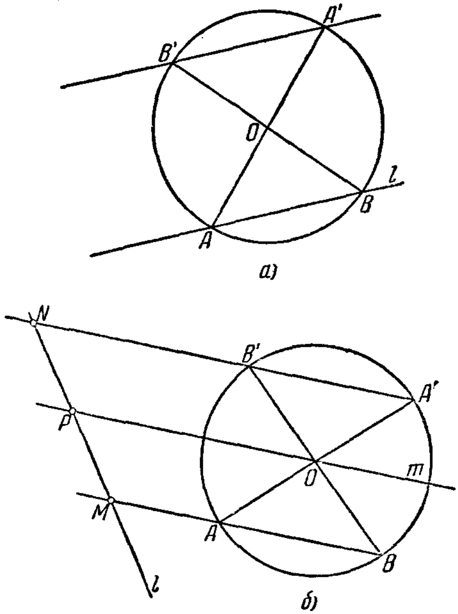


Черт. 152.

Наконец, если точка M расположена на диаметре AB (черт. 152, *б*), то, используя первое построение, опускаем из произвольной точки M' перпендикуляр на AB. Пусть этот перпендикуляр пересекает окружность в точках C и D, а диаметр AB в точке P; тогда $CP = PD$. Далее, используя построение задачи 57 б), проводим через точку M прямую, параллельную CD (см. примечание в конце решения задачи 57, б)).

59. а) Если прямая l пересекает заданную окружность в точках A и B (черт. 153, *а*), то диаметры AO и BO пересекают второй раз окружность в таких точках A' и B', что $B'A'$ параллельно BA. Этим замечанием наша задача сводится к задаче 57 *б*).

Если прямая l не пересекает окружности C, то проведем в окружности произвольную хорду AB, диаметры AA' и BB' и хорду $A'B'$ (черт. 153, *б*). Пользуясь задачей 57 б), мы можем провести через центр O круга C прямую m, параллельную AB и $B'A'$. Прямые AB, $B'A'$ и m пересекают прямую l соответственно в точках M, N, P, где P есть сере-



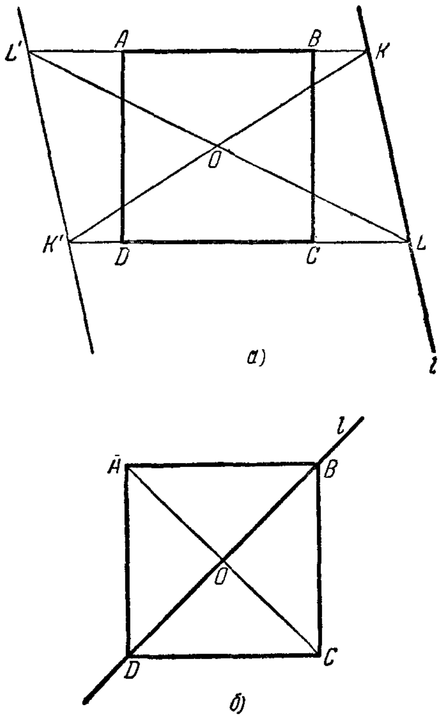
Черт. 153.

дина отрезка MN; это позволяет снова использовать для проведения искомой прямой построение задачи 57 б) (см. замечание в конце решения задачи 57 б)).

б) Проведем через центр O окружности C прямую, параллельную l (задача 59 а)); после этого наша задача сведется к задаче 58.

60. а) Пусть O есть центр квадрата $ABCD$, K и L — точки пересечения прямой l соответственно со сторонами AB и DC квадрата, K' — точка пересечения KO со стороной DC и L' — точка пересечения LO со стороной AB (черт. 154, a). В таком случае $L'K' \| KL$, и наша задача сводится к задаче 57 б).

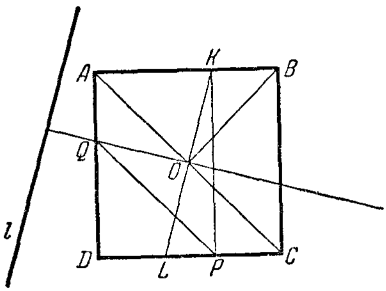
Приведенное построение не проходит в том случае, когда прямая l совпадает с диагональю квадрата (черт. 154, *б*). Но в этом случае нам известна середина отрезка DB прямой l (центр O квадрата), и построение осуществляется способом, указанным в замечании к решению задачи 57 б).



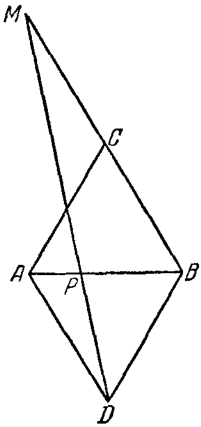
Черт. 154.

б) Прежде всего проводим через центр O квадрата прямую, параллельную l (см. задачу а)); пусть она пересекает стороны AB и DC соответственно в точках K и L. Затем проведем через K прямую, параллельную BC, до пересечения с DC в точке P, и через точку P прямую, параллельную AC

(черт. 155). Пусть Q есть точка пересечения последней прямой с AD; тогда прямая QO перпендикулярна к KL. [Действительно, треугольники OKB и OQA равны, ибо $BO = AO$; $\angle KBO = \angle QAO$ и $BK = AQ$, так как $KB = PC$ и $QA = PC$. Отсюда следует, что $\angle BOK = \angle AOQ$ и $\angle KOQ = \angle BOA = 90°$.] Теперь остается только провести через точку M прямую, параллельную OQ.



Черт. 155.



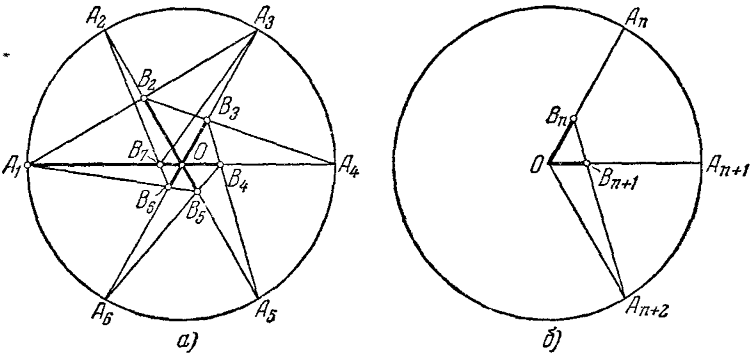
Черт. 156.

61. На отрезке AB по обе стороны от него построим два равносторонних треугольника ABC и ABD (черт. 156). На стороне BC одного из этих треугольников отложим отрезок BM, равный na, и точку M соединим с D. Если P есть точка пересечения прямой MD с отрезком AB, то $AP = \frac{1}{n+1}a$. Доказательство следует из подобия треугольников ADP и BMP: $\frac{BP}{AP} = \frac{BM}{AD} = n$.

Если нам достаточно построить где-то на плоскости (не обязательно на прямой AB) отрезок длины $\frac{a}{n}$, то можно предложить иное, чрезвычайно изящное решение настоящей задачи. Построим окружность C радиуса $OA_1 = a$ с центром O и радиусом, равным a, засечем на окружности точки A_2 $(A_1A_2 = a)$, A_3 $(A_2A_3 = a)$, A_4 $(A_3A_4 = a)$, A_5 $(A_4A_5 = a)$ и A_6 $(A_5A_6 = a)$.

В таком случае A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 суть вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность C (черт. 157, *а*). Далее, пусть прямая A_3A_1 пересекает радиус OA_2 в точке B_2, прямая A_4B_2 пересекает радиус OA_3 в точке B_3, прямая A_5B_3 пересекает радиус OA_4 в точке B_4 и т. д. Тогда $OB_2=\frac{a}{2}$, $OB_3=\frac{a}{3}$, $OB_4=\frac{a}{4}$ и т. д.

Доказательство удобнее всего провести по принципу математической индукции. Действительно, очевидно, что $OB_2=\frac{1}{2}OA_2=\frac{a}{2}$.



Черт. 157.

Предположим, что мы уже доказали, что $OB_n=\frac{a}{n}$, и покажем, что $OB_{n+1}=\frac{a}{n+1}$ (черт. 157, *б*). По свойству биссектрисы угла имеем

$$\frac{B_nB_{n+1}}{B_{n+1}A_{n+2}}=\frac{OB_n}{OA_{n+2}}=\frac{1}{n}, \quad \text{откуда} \quad \frac{S_{\triangle OB_nB_{n+1}}}{S_{\triangle OB_nA_{n+2}}}=\frac{B_nB_{n+1}}{B_nA_{n+2}}=\frac{1}{n+1}.$$

Но, с другой стороны,

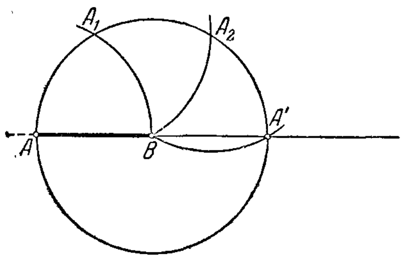
$$\frac{S_{\triangle OB_nB_{n+1}}}{S_{\triangle OB_nA_{n+2}}}=\frac{OB_n\cdot OB_{n+1}\cdot\sin 60^\circ}{OB_n\cdot OA_{n+2}\sin 120^\circ}=\frac{OB_{n+1}}{OA_{n+2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{OB_{n+1}}{OA_{n+2}}=\frac{1}{n+1}; \quad OB_{n+1}=\frac{a}{n+1},$$

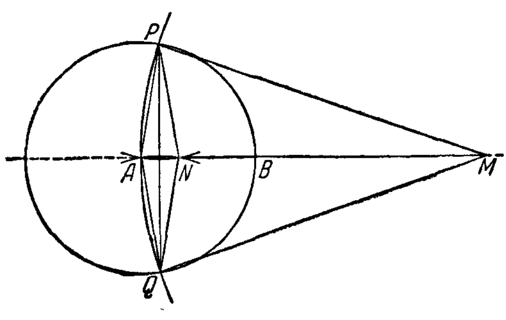
что и требовалось доказать.

62. а) Проведем окружность с центром в точке B и радиусом BA. Далее радиусом, равным BA, сделаем на окружности засечки $AA_1 = BA$, $A_1A_2 = BA$, $A_2A' = BA$ (черт. 158). Очевидно, что в таком случае A' есть второй конец диаметра AA' окружности, т. е. $AA' = 2AB$. Повторяя это построение, мы можем найти на продолжении прямой AB за точку B такую точку M, что $AM = nAB$ (для этого находим последовательные точки прямой AB такие, что $AA' = BA$, $A'A'' = BA'$, $A''A''' = A'A''$, ... и т. д.).



Черт. 158.

б) Построением, указанным в решении задачи а), увеличим данный отрезок AB в n раз. Пусть $AM = nAB$. Проведем окружности с центрами в точках M и A радиусами, равными, соответственно MA и AB (черт. 159). Пусть эти окружности пересекаются в точках P и Q. Проведем, далее, через



Черт. 159.

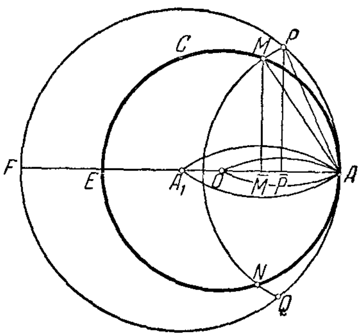
точку A окружности с центрами P и Q и обозначим вторую точку пересечения этих окружностей через N. Тогда, как легко следует из соображений симметрии, точка N лежит на отрезке AB. Кроме того, $AN = \frac{1}{n} AB$. Действительно, из подобия равнобедренных треугольников APM и APN с общим острым углом PAM имеем

$$\frac{AN}{AP}=\frac{AP}{AM}=\frac{1}{n},$$

откуда

$$AN=\frac{1}{n}BA.$$

в) Из произвольной точки A окружности C, как из центра, проводим дугу MN, пересекающую окружность C в точках M и N (черт. 160). Из точек M и N проводим радиусом $MA=AN$ дуги, пересекающиеся в точке A_1 (A_1 симметрична A относительно прямой MN). Из точки A_1 радиусом A_1A проводим окружность, пересекающую первую из проведенных окружностей в точках P и Q; из точек P и Q проводим радиусами PA и QA окружности, пересекающиеся в точке O (O симметрично A относительно прямой PQ). Точка O и есть искомый центр окружности.



Черт. 160.

Действительно, пусть $\overline{P}$ и $\overline{M}$ суть соответственно проекции точек P и M на прямую AA_1, E и F — соответственно точки пересечения прямой AA_1 с окружностями C и PAQ. В таком случае имеем

$$AP^2=A\overline{P}\cdot AF=A\overline{P}\cdot 2AA_1=AA_1\cdot 2A\overline{P}=AA_1\cdot AO,$$

$$AM^2=A\overline{M}\cdot AE=A\overline{M}\cdot 2r=2A\overline{M}\cdot r=AA_1\cdot r,$$

где r есть радиус окружности C. Но по построению

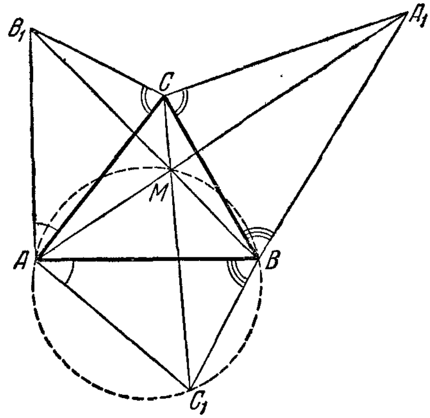
$$AP=AM$$

и, следовательно,

$$AO=r,$$

что и требовалось доказать.

63. Очевидно, что если существует точка, из которой стороны треугольника ABC видны соответственно под углами α, β и γ, где $\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$, то эта точка должна лежать внутри треугольника. С другой стороны, если сторона AB треугольника видна из некоторой внутренней точки M под углом α, то должно быть $\alpha=\angle AMB>\angle ACB=\angle C$; точно так же должно быть $\beta>\angle A$, $\gamma>\angle B$. В дальнейшем мы будем считать эти неравенства выполненными; в противном случае решение задачи невозможно.



Черт. 161.

Построим при точке A вне треугольника два угла $\angle BAC_1=$ $=\angle CAB_1=180^\circ-\beta$. Точно так же построим вне треугольника углы $\angle ABC_1=\angle CBA_1=180^\circ-\gamma$ и $\angle ACB_1=$ $=\angle BCA_1=180^\circ-\alpha$ (черт. 161). Мы утверждаем, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, а именно, в искомой точке M.

Действительно, так как

$$\angle AC_1B=180^\circ-(180^\circ-\beta)-(180^\circ-\gamma)=$$
$$=\beta+\gamma-180^\circ=(360^\circ-\alpha)-180^\circ=180^\circ-\gamma,$$

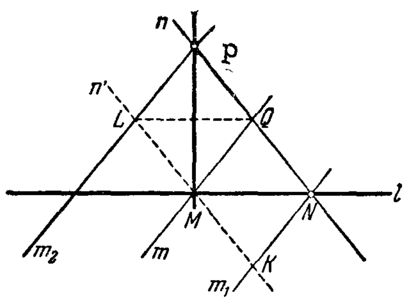
то окружность, описанная около треугольника ABC_1, проходит через искомую точку M. Соединим теперь точку M с точкой C_1; $\angle C_1MB=\angle C_1AB$ как углы, опирающиеся на одну дугу; следовательно,

$$\angle C_1MB = 180° - \beta,$$
$$\angle C_1MB + \angle BMC = (180° - \beta) + \beta = 180°.$$

Отсюда вытекает, что точки C, M и C_1 лежат на одной прямой. Точно так же доказывается, что точки B, M и B_1 лежат на одной прямой и точки A, M и A_1 лежат на одной прямой.

Примечание. Совершенно аналогично решается задача о построении линейкой и транспортиром точки M такой, что два угла AMB и BMC имеют известные величины α и β. В этом случае нет необходимости требовать, чтобы было $\alpha > \angle C$, $\beta > \angle A$; в соответствии с этим найденная точка не обязательно будет лежать внутри треугольника.

64. Проведем через точку M произвольную прямую m (черт. 162) и с помощью двусторонней линейки проведем прямые m_1 и m_2, параллельные m и отстоящие от нее на одинаковое расстояние d, равное ширине линейки. Пусть N — точка пересечения m_1 и l. Прикладываем теперь нашу линейку так, чтобы один ее край проходил через точку M, а второй — через N, и проводим прямую n, совпадающую с краем линейки, проходящим через N. Если P есть точка пересечения n и m_2, то PM перпендикулярно к l.

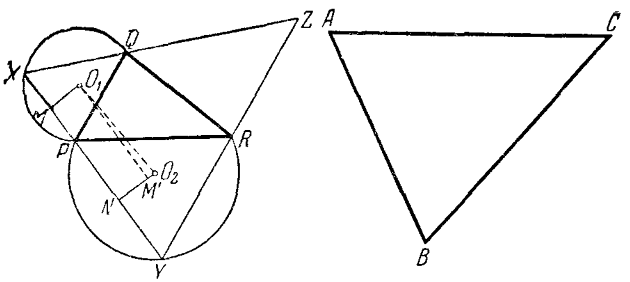


Черт. 162.

Действительно, пусть n' есть прямая, параллельная n и проходящая через M. Пусть n' пересекает прямые m_1 и m_2 соответственно в точках K и L. Обозначим также через Q точку пересечения прямых m и n. Четырехугольники $MLPQ$ и $MKNQ$ будут по построению параллелограммами с равными высотами, т. е. ромбами. Эти ромбы равны и параллельно расположены, следовательно, $LQ \parallel l$. В ромбе $PQML$ диагонали PM и QL перпендикулярны. Таким образом, $PM \perp l$.

65. Очевидно, данная задача равносильна следующей: описать вокруг данного треугольника PQR треугольник, равный другому заданному треугольнику ABC. Эту задачу мы и будем решать. Будем при этом считать, что сторона искомого треугольника, равная AB, должна проходить через вершину P треугольника PQR, а стороны, равные AC и BC, проходят соответственно через Q и R.

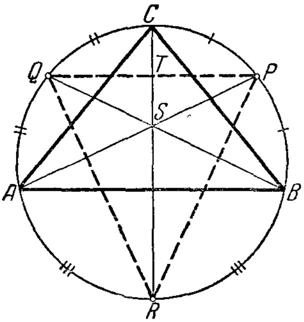
Пусть треугольник XYZ — искомый: $XY = AB$, $XZ = AC$, $YZ = BC$ (черт. 163). Так как $\angle PXQ = \angle BAC$, то точка X



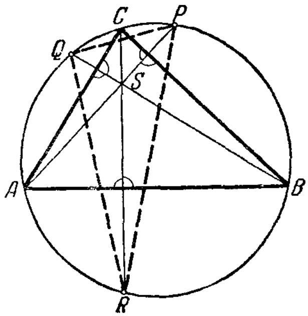
Черт. 163.

лежит на дуге сегмента, построенного на отрезке PQ и вмещающего известный угол. Точно так же точка Y лежит на дуге сегмента, построенного на отрезке PR и вмещающего известный угол, равный углу B треугольника ABC. Теперь опустим из центров O_1 и O_2 этих двух последних дуг перпендикуляры O_1M и O_2M на сторону XY треугольника XYZ; очевидно, $PM = \frac{1}{2}PX$, $PN = \frac{1}{2}PY$ и, следовательно, $MN = \frac{1}{2}XY = \frac{1}{2}AB$, т. е. нам известно. Это позволяет построить треугольник O_1O_2M', где M' есть точка пересечения отрезка O_2N с прямой O_1M', параллельной XY: в этом треугольнике дана сторона O_1O_2, известна сторона $O_1M' = MN = \frac{1}{2}AB$ и угол M' прямой. Проведя затем из точки P прямую XY параллельно O_2M' и соединив точки X и Y соответственно с Q и с R, мы найдем искомый треугольник XYZ. Очевидно, задача имеет два решения, если $O_1O_2 > \frac{1}{2} AB$, одно — если $O_1O_2 = \frac{1}{2} AB$, и ни одного — если $O_1O_2 < \frac{1}{2} AB$.

66. а) Пусть ABC — искомый треугольник, P, Q и R — точки пересечения его биссектрис с описанной окружностью, S — точка пересечения биссектрис (черт. 164). Покажем, что в треугольнике PQR прямые AP, BQ и CR служат высотами.



Черт. 164.



Черт. 165.

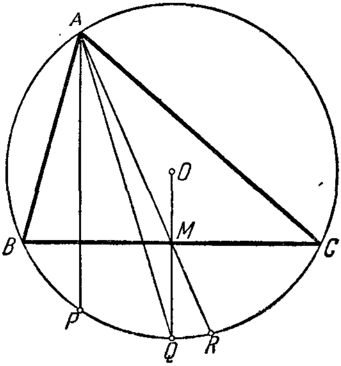
Действительно, пусть T есть точка пересечения прямых PQ и CR. В таком случае $\angle QTC$ измеряется дугой $\frac{\overset{\frown}{QC} + \overset{\frown}{PB} + \overset{\frown}{BR}}{2}$, $\angle CTP$ измеряется дугой $\overset{\frown}{CP} + \overset{\frown}{RA} + \overset{\frown}{AQ}$. Но так как прямые AP, BQ и CR есть биссектрисы треугольника ABC, то $\overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{BP}$, $\overset{\frown}{BR} = \overset{\frown}{RA}$, $\overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{QC}$; следовательно, $\angle QTC = \angle CTP = 90^\circ$. Таким образом, построив высоты треугольника PQR и продолжив их до пересечения с окружностью, найдем вершины треугольника ABC.

б) Пусть ABC — искомый треугольник, P, Q и R — точки пересечения высоты с описанной окружностью, S — точка пересечения высот (черт. 165). Покажем, что в треугольнике PQR прямые AP, RQ и CR служат биссектрисами. Действительно, $\angle CAP = \angle CRP$ и $\angle QRC = \angle QBC$, так как каждая пара опирается на одну и ту же дугу. Но каждый из углов CAP и QBC равен $90^\circ - \angle ABC$ и, следовательно, $\angle QRC = \angle CRP$.

Поэтому, построив биссектрисы треугольника PQR и продолжив их до пересечения с окружностью, найдем вершины треугольника ABC.

Примечание. Отметим замечательную симметрию решений задач 66 а) и б), которая позволяет дать им единую формулировку: если P, Q, R суть точки пересечения биссектрис (высот) треугольника ABC с описанной около ABC окружностью, то точки A, B, C суть точки пересечения продолжений высот (биссектрис) треугольника PRQ с описанной около PQR окружностью.

в) Пусть ABC — искомый треугольник, P, Q и R — точки пересечения с описанной окружностью высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершины A, и O — центр окружности (черт. 166). Так как точка Q — середина дуги BC, то прямая OQ проходит через середину M стороны BC и параллельна высоте AP. Отсюда вытекает следующее построение. Соединяем точку O с точкой Q и через точку P проводим прямую, параллельную OQ, до пересечения с окружностью в точке A. Соединяем затем A с R и через точку M пересечения прямых AR и OQ проводим прямую BC, перпендикулярную к AP. Если B и C — точки пересечения этой прямой с окружностью, то треугольник ABC — искомый.

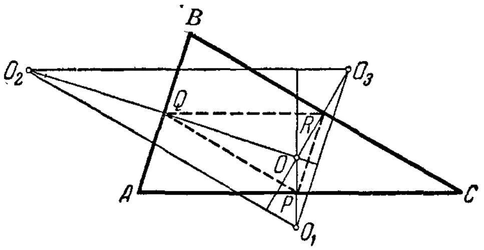


Черт. 166.

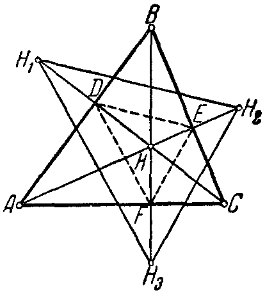
67 а) Пусть ABC — искомый треугольник, O_1, O_2, O_3 — точки, симметричные относительно сторон треугольника центру O описанного вокруг треугольника круга (черт. 167). Легко видеть, что перпендикуляры к серединам сторон треугольника ABC являются высотами треугольника $O_1O_2O_3$. В самом деле, пусть P, Q, R — середины сторон треугольника ABC. Тогда $PQ \parallel BC$ как средняя линия треугольника ABC; следовательно, $OO_3 \perp PQ$. Но, с другой стороны, $PQ \parallel O_1O_2$ как средняя линия треугольника O_1O_2O; следовательно, $OO_3 \perp O_2O_1$. Точно так же доказывается, что $O_2O \perp O_1O_3$ и $O_1O \perp O_2O_3$.

Отсюда вытекает следующее построение.

Проведем высоты треугольника $O_1O_2O_3$ и найдем его ортоцентр (точку пересечения высот) O. Найдем точки P, Q, R — середины отрезков O_1O, O_2O, O_3O; через P проведем прямую параллельно O_2O_3, через Q параллельно O_1O_3 и через R параллельно O_2O_1. Эти прямые и будут сторонами треугольника ABC.



Черт. 167.



Черт. 168.

б) Пусть H_1, H_2, H_3 точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно его сторон (черт. 168). Стороны треугольника $H_1H_2H_3$ параллельны сторонам треугольника DEF с вершинами в основаниях высот искомого треугольника ABC ($DE \parallel H_1H_2$ как средняя линия треугольника HH_1H_2; аналогично $EF \parallel H_2H_3$, $DF \parallel H_1H_3$). Но легко видеть, что высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника DEF: из рассмотрения четырехугольника $ADHF$, вокруг которого можно описать окружность, следует $\angle HFD = \angle HAD$ (как опирающиеся на одну дугу), $\angle HFE = \angle HCE$; $\angle HAD = \angle HCE$ (следует из рассмотрения треугольников HAD и HCE). Биссектрисы же треугольника $H_1H_2H_3$ совпадают с биссектрисами треугольника DEF, т. е. с высотами треугольника ABC.

Отсюда вытекает следующее построение. Проведем биссектрисы треугольника $H_1H_2H_3$ и через середины отрезков H_1O, H_2O и H_3O (O — точка пересечения биссектрис) проводим перпендикуляры к ним. Эти перпендикуляры и являются сторонами искомого треугольника.

Примечание. Решения задач 67а) и б) очень похожи и могут быть записаны едино (ср. с примечанием к решениям задач 66а) и б)): если P, Q, R — точки, симметричные центру описанной окружности (ортоцентру) треугольника ABC относительно его сторон, то стороны треугольника ABC суть перпендикуляры, восставленные к отрезкам PO, QO, RO, где O есть ортоцентр (центр вписанной окружности) треугольника PQR, в их серединах.

68. а) Первое решение. Допустим, что задача решена, и пусть A_1, B_1, C_1 — центры квадратов (черт. 169). Пусть D, E, F — середины сторон треугольника ABC; докажем, что треугольники C_1DE и DFB_1 равны. Действительно, $DE=\frac{AC}{2}$ как средняя линия в $\triangle ABC$, но и $FB_1=\frac{AC}{2}$, следовательно, $DE=FB_1$. Аналогично $DF=EC_1$. Далее

$$\angle C_1ED=90°+\angle BED=90°+\angle A,$$
$$\angle B_1FD=90°+\angle CFD=90°+\angle A;$$

поэтому $\angle C_1ED=\angle B_1FD$. Следовательно, действительно $\triangle C_1ED=\triangle B_1FD$. Отсюда получаем $C_1D=B_1D$.

Обозначим, далее, $\angle FDB_1=\alpha$ и $\angle FB_1D=\beta$. Тогда

$$\alpha+\beta=180°-\angle DFB_1=180°-(90°+A)=90°-A.$$

Так как $\angle EDC_1=\beta$, то

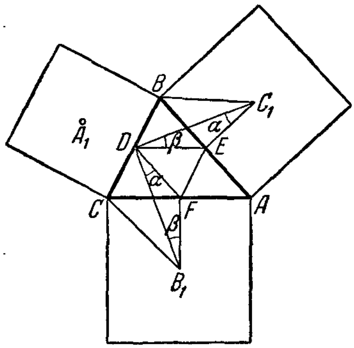
$$\angle B_1DC_1=\alpha+\angle FDE+\beta=$$
$$=\alpha+\beta+\angle A=(90°-\angle A)+\angle A=90°.$$

Таким образом, отрезки DB_1 и DC_1 взаимно перпендикулярны и равны.

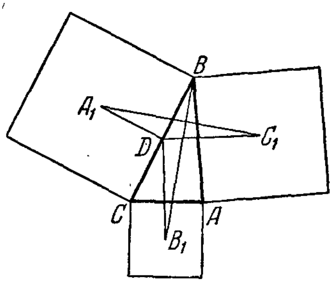
Отсюда вытекает следующее построение. На отрезке B_1C_1 строим, как на основании, равнобедренный прямоугольный треугольник C_1B_1D; по доказанному точка D будет серединой стороны BC треугольника ABC. Точно так же находим другие середины E и F сторон BA, соответственно AC. Затем проводим через D прямую, параллельную EF, через E прямую, параллельную DF, через F прямую, параллельную ED. Эти прямые, пересекаясь, и дадут искомый треугольник ABC.

Второе решение. Соединим точку C_1 с A_1 и вершину B искомого треугольника с точкой B_1 (черт. 170). Повернем отрезок BB_1 около середины D стороны BC на 90°. Тогда точка B_1 перейдет в точку C_1, ибо $C_1D=DB_1$ и $C_1D\perp DB_1$ (см. первое решение задачи), а точка B перейдет в точку A_1, так как $A_1D=BD$ и $A_1D\perp BD$. Таким образом, отрезок BB_1 перейдет в отрезок A_1C_1; и, следовательно, $A_1C_1=BB_1$ и $A_1C_1\perp BB_1$.

Отсюда вытекает следующее построение. Соединяем точки C_1 и A_1, опускаем из B_1 перпендикуляр на A_1C_1 и откладываем на этом перпендикуляре отрезок $B_1B = A_1C_1$. Тогда



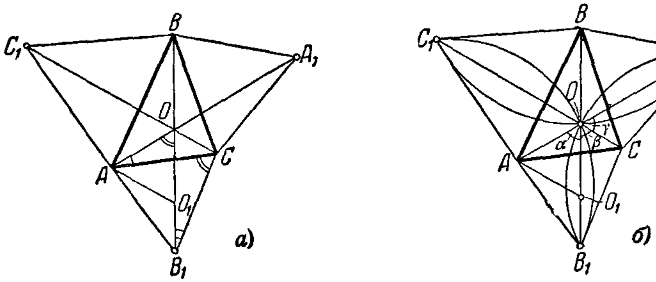
Черт. 169.



Черт. 170.

B — вершина треугольника ABC. Так же находим и две другие вершины этого треугольника.

б) Докажем прежде всего, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 (черт. 171, *а*) пересекаются в одной точке. Соединим точку O



Черт. 171.

пересечения AA_1 и BB_1 с точками C_1 и C. Докажем, что C_1OC есть одна прямая. Треугольник CAA_1 после поворота вокруг вершины C на $60°$ займет положение CB_1B. Следовательно, $\angle CB_1B = \angle CAA_1$, а потому точки C, B_1, A, O лежат на одной окружности. Отсюда следует, что $\angle B_1CA = \angle B_1OA$

как углы, опирающиеся на одну хорду; следовательно, $\angle B_1OA = 60°$. Отложим на OB_1 отрезок $OO_1 = OA$. Тогда треугольник AOO_1 — равносторонний. Повернем теперь точки C, O, C_1 около точки A на $60°$ (по часовой стрелке). Тогда C перейдет в B_1, O в O_1, C_1 в B. Таким образом, после вращения точки C, O, C_1 перешли в три точки B, O_1, B_1, лежащие на одной прямой. Следовательно, и сами они лежат на одной прямой.

Заметим еще, что попутно мы получили

$$\angle B_1OA = 60°.$$

Аналогично имеем

$$\angle C_1OA = \angle C_1OB = \angle A_1OB = \angle A_1OC = \angle B_1OC = 60°,$$

откуда

$$\angle A_1OB_1 = \angle B_1OC_1 = \angle C_1OA_1 = 120°.$$

При повороте вокруг C на $60°$ против часовой стрелки отрезок AA_1 переходит в отрезок B_1B; следовательно, эти отрезки равны. Точно так же показывается равенство отрезков AA_1 и C_1C; следовательно,

$$AA_1 = BB_1 = CC_1.$$

Далее, при повороте вокруг A на $60°$ отрезок OC переходит в O_1B_1, следовательно, $OC = O_1B_1$ и так как $OA = OO_1$, то

$$OA + OC = OB_1.$$

Аналогично показывается, что

$$OA + OB = OC_1, \quad OB + OC = OA_1.$$

Теперь из последних трех равенств без труда выводим

$$OA = \frac{1}{2}(OB_1 + OC_1 - OA_1), \quad OB = \frac{1}{2}(OA_1 + OC_1 - OB_1),$$
$$OC = \frac{1}{2}(OA_1 + OB_1 - OC_1).$$

Отсюда вытекает следующее построение. Описываем на отрезках A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 три дуги, вмещающие угол $120°$ каждая; эти три дуги пересекутся в некоторой точке O (черт. 171, *б*). Проведем прямые OC_1, OB_1 и OA_1. Пусть $OB_1 > OA_1$.

Отложим на OB_1 отрезок OA_1. Получившуюся разность прибавим к отрезку OC_1 и разделим полученный отрезок пополам. Тогда найдем отрезок, равный OA; действительно,

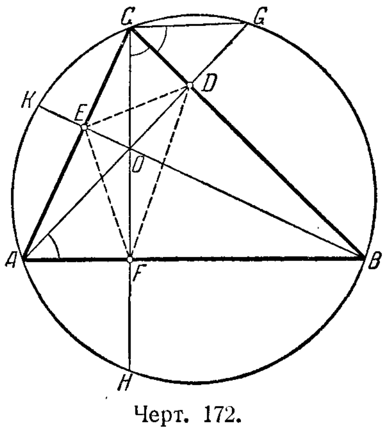
$$OA = \frac{1}{2}(OB_1 - OA_1 + OC_1).$$

Затем отложим полученный отрезок от точки O по прямой A_1O и получим вершину A. Зная отрезок OA, легко найти OB и OC и построить вершины B и C.

Для доказательства правильности построения отложим на OB отрезок $OO_1 = OA$. Так как

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

(см. черт. 171, *б*), а $\beta + \gamma = 120°$, то $\alpha = 60°$. Следовательно, треугольник AOO_1 равносторонний, $\angle AO_1O = 60°$. Теперь в треугольнике AO_1B_1 $AO_1 = AO$, $B_1O_1 = CO$ (по построению) и $\angle B_1O_1A = 120° = \angle COA$. Следовательно, $\triangle B_1O_1A = \triangle COA$, а потому $B_1A = AC$. Аналогично докажем, что $B_1C = AC$. Таким образом, B_1 есть вершина равностороннего треугольника, построенного на стороне AC.

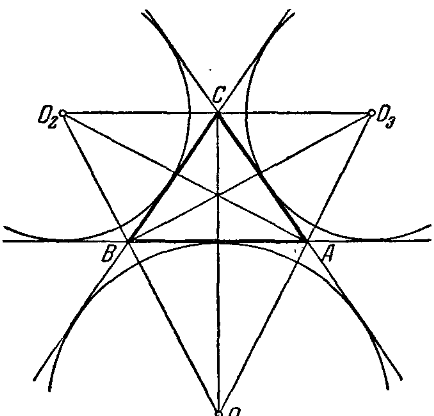


Черт. 172.

69. а) Пусть ABC — искомый треугольник, D, E, F — основания его высот, O — ортоцентр (точка пересечения высот), G, H, K — точки пересечения высот AD, CF, BE треугольника ABC с описанной около него окружностью (черт. 172). В таком случае мы будем иметь $\angle GCB = \angle GAB$, как опирающиеся на одну и ту же дугу, $\angle DAB = \angle FCB = 90° - \angle B$; следовательно, $\angle GCD = \angle OCD$. Прямая CD является в треугольнике OCG высотой и биссектрисой; следовательно, она же является и медианой: $OD = DG$; аналогично $OF = FH$ и $OE = EK$. Кроме того, высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника EDF (см. решение задачи 67 б)).

Отсюда вытекает следующее построение. В треугольнике EDF проводим биссектрисы EO, DO, FO, на продолжении их откладываем отрезки $EK=EO$, $DG=DO$, $FH=FO$. Окружность, проведенная через точки G, H, K, пересечет второй раз прямые OD, OF, OE в вершинах искомого треугольника.

б) Пусть O_1, O_2, O_3 — заданные центры вневписанных окружностей искомого треугольника ABC (черт. 173). Тогда CO_1 есть биссектриса угла BCA треугольника, а CO_2 биссектриса внешнего угла треугольника ABC, т. е.



Черт. 173.

$$\angle BCO_1 = \frac{\angle BCA}{2},$$

$$\angle BCO_2 = \frac{180^\circ - \angle BCA}{2}$$

и, следовательно,

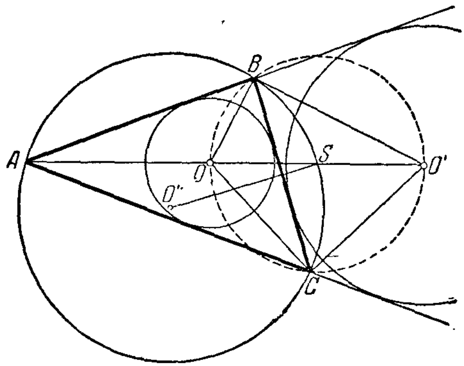
$$\angle O_1CO_2 = 90^\circ.$$

Аналогично

$$\angle O_1CO_3 = 90^\circ;$$

значит, O_2CO_3 есть одна прямая и $O_2O_3 \perp O_1C$. Таким образом, прямые O_1C, O_2A, O_3B являются высотами треугольника $O_1O_2O_3$. Построив эти высоты, найдем вершины A, B, C искомого треугольника.

в) Пусть O и O' — соответственно центры вписанной и вневписанной окружности треугольника ABC, касающиеся стороны BC треугольника и продолжений сторон AB и AC (черт. 174). Построим окружность на отрезке OO', как на диаметре. Эта окружность проходит, очевидно, через точки B и C: действительно, так как BO и BO' суть соответственно биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине треугольника, то $BO \perp BO'$ и $\angle OBO' = 90^\circ$; аналогично и $\angle OCO' = 90^\circ$. Центр построенной окружности лежит в середине S отрезка OO'; с другой стороны, так как B и C — точки окружности, то центр окружности лежит на перпендикуляре к отрезку BC, восставленном в его середине. Таким образом, мы видим, что середина S отрезка OO' совпадает с точкой пересечения биссектрисы AOO' треугольника с перпендикуляром, восставленным к стороне BC треугольника в его середине; так как обе последние прямые проходят через середину дуги BC описанной окружности, то середина S

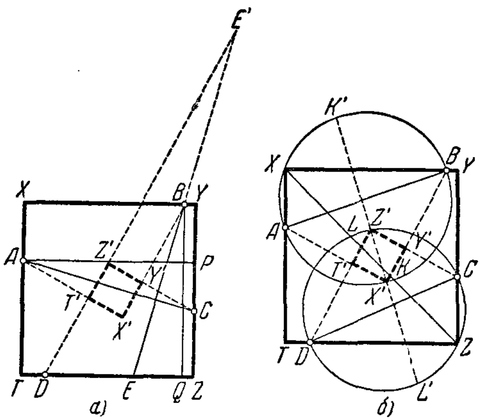


Черт. 174.

отрезка OO' должна лежать на описанной около треугольника ABC окружности (другими словами, описанная окружность делит пополам отрезок между центрами вписанной и вневписанной окружностей). Зная центр O'' описанной окружности и одну ее точку S, мы можем построить саму эту окружность; в пересечении ее с ранее проведенной окружностью найдутся вершины B и C треугольника. Вершину A можно найти как точку пересечения описанной окружности с прямой OO'.

70. а) Первое решение. Пусть A, B, C, D — данные четыре точки на сторонах искомого квадрата $XYZT$; пусть при этом точки A и C, B и D лежат на противоположных сторонах квадрата (черт. 175, *а*). Соединим точки A и C, из точки B опустим перпендикуляр на прямую AC и обозначим точку пересечения этого перпендикуляра со стороной ZT квадрата через E.

Если точки P и Q суть соответственно проекции точек A и B на прямые YZ и ZT, то прямоугольные треугольники APC и BQE, имеющие равные острые углы (углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и равные катеты AP и BQ, равны между собой. Таким образом, $BE=AC$. Следовательно, мы можем найти точку E; соединив эту точку с точкой D, мы получим сторону ZT квадрата, после чего нахождение всех остальных сторон уже не представляет затруднений.



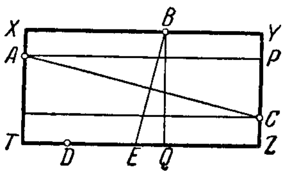
Черт. 175.

Если считать, что точки A и C лежат на противоположных сторонах квадрата, то наша задача допускает два решения, так как отрезок $BE=AC$ можно отложить по одну и по другую стороны точки B (см. черт. 175,*а*). Но можно также считать, что на противоположных сторонах квадрата лежат точки A и B или A и D. Таким образом, задача имеет, вообще говоря, шесть решений. Если в приведенном нами построении точки E и D совпадут, то задача будет иметь бесчисленное множество решений.

Второе решение. Попрежнему считаем, что точки A и C лежат на противоположных сторонах квадрата $XYZT$ (черт. 175, *б*). Диагональ XZ квадрата делит пополам его углы YXT и YZT, отсюда следует, что эта диагональ делит пополам полуокружности, построенные на отрезках AB и CD. Соединив середины K и L построенных на этих отрезках полуокружностей, мы получим в пересечении прямой KL со вторыми полуокружностями, построенными на этих же отрезках, вершины X и Z квадрата. После этого построение квадрата уже не представляет затруднений.

Если точки A и C лежат на противоположных сторонах квадрата $XYZT$, то дуги AK и CL, как нетрудно видеть, имеют одинаковое направление. Таким образом, выбрав точку K (что можно сделать двумя способами: на одной и на другой полуокружности, построенной на отрезке AB), мы вынуждены будем одним способом выбрать точку L. Таким образом, если считать, что точки A и C расположены на противоположных сторонах квадрата, мы получим два решения задачи. Всего задача имеет, вообще говоря, шесть решений (мы можем считать, что на противоположных сторонах квадрата расположены точки A и C, или A и B, или A и D). Если точки K и L в нашем построении совпадут, задача будет иметь бесчисленное множество решений.

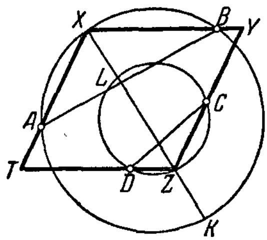
б) На этот случай хорошо переносится первое решение задачи а); только треугольники ACP и BQE (черт. 176) этого решения теперь будут подобны (а не равны, как раньше), и мы будем знать о т н о ш е н и е отрезков AC и BE (равное отношению сторон прямоугольника). Впрочем, и второе решение задачи а) переносится на этот случай; только теперь диагональ XZ прямоугольника разделит полуокружности, построенные на отрезках AB и CD, не пополам, а в данном отношении, которое можно определить, если построить вспомогательный прямоугольник, подобный данному.



Черт. 176.

Задача имеет, вообще говоря, двенадцать решений (удвоение числа решений по сравнению с задачей а) происходит за счет того, что, например, через точку A может проходить бóльшая или меньшая сторона прямоугольника).

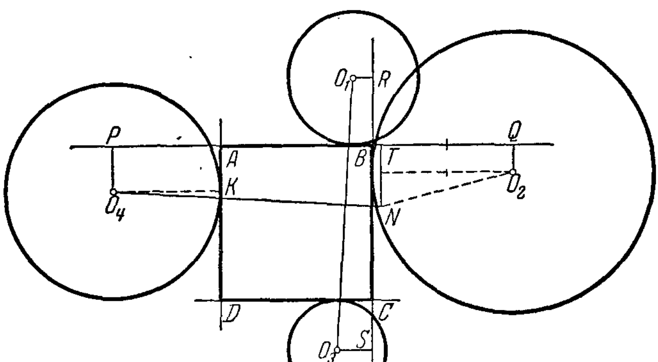
в) На этот случай хорошо переносится второе решение задачи а); единственным отличием будет то, что построенные на отрезках AB и CD (черт. 177) окружности не будут иметь центры на этих отрезках (дуги AXB и CZD должны вмещать углы, равные углам ромба). Впрочем, и первое решение может быть перенесено на случай ромба; только в этом случае отрезки AC и BE должны быть не перпендикулярны между собой, а образовывать угол, равный углу ромба.



Черт. 177.

Задача имеет, вообще говоря, двенадцать решений (удвоение числа решений происходит от того, что ромб имеет два неравных угла).

71. Эту задачу можно решить аналогично первому решению задачи 70 а). Обозначим центры заданных четырех окружностей через O_1, O_2, O_3 и O_4, а радиусы соответственно через r_1, r_2, r_3 и r_4. Предположим, например, что окружности C_1, C_2, C_3 и C_4 касаются соответственно сторон AB, BC, CD и DA квадрата; положим еще для определенности, что все четыре окружности касаются сторон квадрата с внешней стороны квадрата



Черт. 178.

(черт. 178). Если P и Q — проекции точек O_4 и O_2 на сторону AB квадрата, а R и S — проекции точек O_1 и O_3 на сторону BC, то, очевидно, $AB = PQ - r_4 - r_2$, $BC = RS - r_1 - r_3$ (так как, например, O_4PAK есть прямоугольник). Опустим из точки O_4 перпендикуляр на прямую O_1O_3 и отложим на нем отрезок O_4N, равный O_1O_3. В таком случае проекция PT отрезка O_4N на сторону AB квадрата равна проекции RS отрезка O_1O_3 на сторону BC (см. первое решение задачи 70 а). Отсюда можно определить проекцию TQ отрезка NO_2 на сторону AB:

$$TQ = PQ - PT = PQ - RS =$$
$$= (AB + r_4 + r_2) - (BC + r_1 + r_3) = r_2 + r_4 - r_1 - r_3 = \rho.$$

Этим определяется направление сторон квадрата; сторона AD имеет то же направление, что и касательная из точки N к кругу с центром в точке O_2 и радиусом $\rho = r_2 + r_4 - r_1 - r_3$ (или $r_1 + r_3 - r_2 - r_4$); если точка N находится вне этого круга, направление сторон квадрата может быть определено двумя способами; если точка N находится на окружности этого круга, направление сторон квадрата определяется однозначно, а если точка N находится внутри круга, то задача вовсе не имеет решений. Другую систему решений можно получить, если отложить отрезок O_4N на перпендикуляре, опущенном из точки O_4 на O_1O_3 в другом направлении.

Таким образом, в сделанных предположениях задача может иметь до четырех решений. Другие решения можно получить, если предположить иной порядок касания кругов C_1, C_2, C_3 и C_4 со сторонами квадрата; таким образом, всего в предположении, что все круги касаются сторон квадрата с внешней стороны, мы будем иметь до 12 решений задачи (ср. с решением задачи 70 а)). Различных предположений о том, с какой стороны касаются круги C_1, C_2, C_3 и C_4, можно сделать 16 (один случай, когда все круги касаются сторон квадрата с внутренней стороны; четыре случая, когда три круга касаются сторон квадрата с внутренней стороны, а один — с внешней; шесть случаев, когда два круга касаются сторон квадрата с внутренней стороны и два — с внешней; четыре случая, когда один круг касается сторон квадрата с внутренней стороны и три — с внешней; один случай, когда все круги касаются сторон квадрата с внешней стороны). Таким образом, всего задача может иметь до $12 \cdot 16 = 192$ решения.

Примечание. Совершенно аналогично можно решить задачу: построить прямоугольник с данным отношением сторон, стороны (или продолжения сторон) которого касаются четырех данных окружностей C_1, C_2, C_3 и C_4. Эта задача может иметь вдвое больше решений, чем задача 71, т. е. 392 (подобно тому, как задача 70 б)) имеет вдвое больше решений чем задача 70 а).

72. Пусть S_1, S_2 и S_3 — искомые окружности, D, E и F — попарные точки касания этих окружностей (черт. 179, *а*). Точки пересечения попарных общих касательных к окружностям со сторонами треугольника обозначим через M, N; P, Q и R, T. Отметим, что касательные MN, PQ и RT пересекаются в одной точке L: действительно, если бы они пересекались в трех точках L_1, L_2 и L_3, то должны были бы иметь место равенства $L_1D=L_1E$, $L_2D=L_2F$, $L_3E=L_3F$, что невозможно.

Пусть теперь окружности S_2 и S_3 касаются стороны BC треугольника в точках G и H (черт. 179, *а*). В таком случае имеем

$$RF=RH,\quad QE=QG,\quad LF=LE,\quad MH=MD=MG$$

и, следовательно,

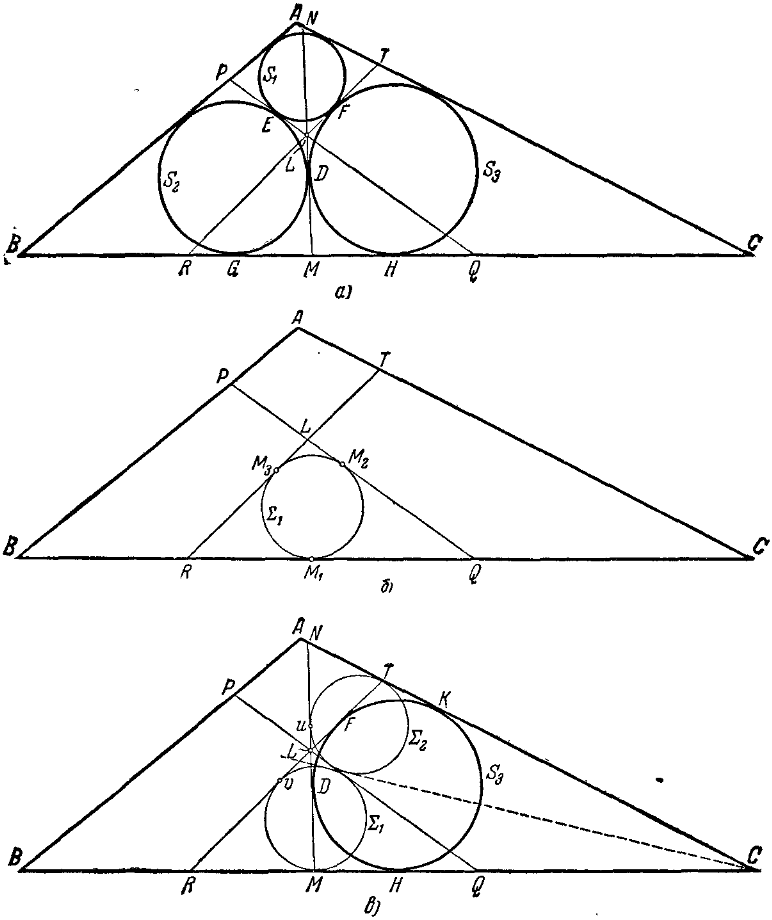
$$\begin{aligned}RL-QL&=(RL+LF)-(QL+LE)=RF-QE=\\&=RH-QG=(RM+MH)-(QM+MG)=RM-QM.\end{aligned}$$

С другой стороны, если вписанная в треугольник QRL окружность Σ касается сторон этого треугольника в точках M_1, M_2 и M_3 (черт. 179, *б*), то

$$\begin{aligned}RL-QL&=(RM_3+M_3L)-(QM_2+M_2L)=\\&=RM_3-QM_2=RM_1-QM_1.\end{aligned}$$

Из сравнения двух последних равенств вытекает, что точка M_1 совпадает с M, т. е. окружность Σ_1, вписанная в треугольник QRL, касается стороны QR в точке M. Точно так же показывается, что окружности Σ_2 и Σ_3, касающиеся AC, MN и PQ, соответственно AB, MN и RT, касаются AC и AB в точках T и P.

Рассмотрим теперь три окружности Σ_1, Σ_2 и S_3 (черт. 179, *в*). Общие внешние касательные RT и MN окружностей Σ_1 и S_3, соответственно Σ_2 и S_3, и общая внутренняя касательная PQ окружностей Σ_1 и Σ_2 пересекаются в одной точке L. Отсюда можно заключить, что вторые общие внешние касательные BC и AC окружностей Σ_1 и S_3, соответственно Σ_2 и S_3 и вторая общая внутренняя касательная окружностей Σ_1 и Σ_2, тоже пересекаются в одной точке, т. е. что отличная от PQ общая внутренняя касательная окружностей Σ_1 и Σ_2 проходит через точку C. Доказательство этого предложения мы приведем в конце решения, а пока примем этот факт за доказанный. Аналогично показывается, что отличная от



Черт. 179.

RT общая внутренняя касательная Σ_1 и Σ_3 проходит через B и отличная от MN общая внутренняя касательная Σ_2 и Σ_3 проходит через A.

Докажем теперь, что общая касательная Σ_1 и Σ_2, проходящая через C, является биссектрисой угла C. Обозначим точку касания Σ_2 и MN через u, точку касания Σ_1 и RT — через v, а точку касаний S_3 и AC — через K (черт. 180, a). В таком случае имеем

$$MD = MH = Fv$$

(MH и Fv — общие внешние касательные Σ_1 и S_3);

$$Du = TK = TF$$

(Du и TK — общие внешние касательные Σ_2 и S_3). Складывая эти равенства, получим

$$Mu = Tv.$$

Соединим теперь M с T и обозначим вторые точки пересечения прямой MT с Σ_1 и Σ_2 через M' и T'. В таком случае

$$Mu^2 = MT \cdot MT', \quad Tv^2 = TM \cdot TM',$$

откуда, в силу равенства $Mu = Tv$,

$$MT' = TM', \quad MM' = TT'.$$

Пусть теперь O_1 есть центр Σ_1, а O_2 — центр Σ_2. Соединим C с O_1 и O_2 и опустим из точек C, O_1 и O_2 перпендикуляры CI, O_1I_1 и O_2I_2 на MT. В таком случае из подобия треугольников CMI и O_1MI_1 имеем

$$\frac{CM}{CI} = \frac{MO_1}{MI_1}, \quad \frac{CM}{MO_1} = \frac{CI}{MI_1};$$

аналогично

$$\frac{CT}{TO_2} = \frac{CI}{TI_2};$$

Но так как $MI_1 = TI_2 \left(M_1I_1 = \frac{1}{2} MM', \ TI_2 = \frac{1}{2} TT'\right)$, то отсюда следует

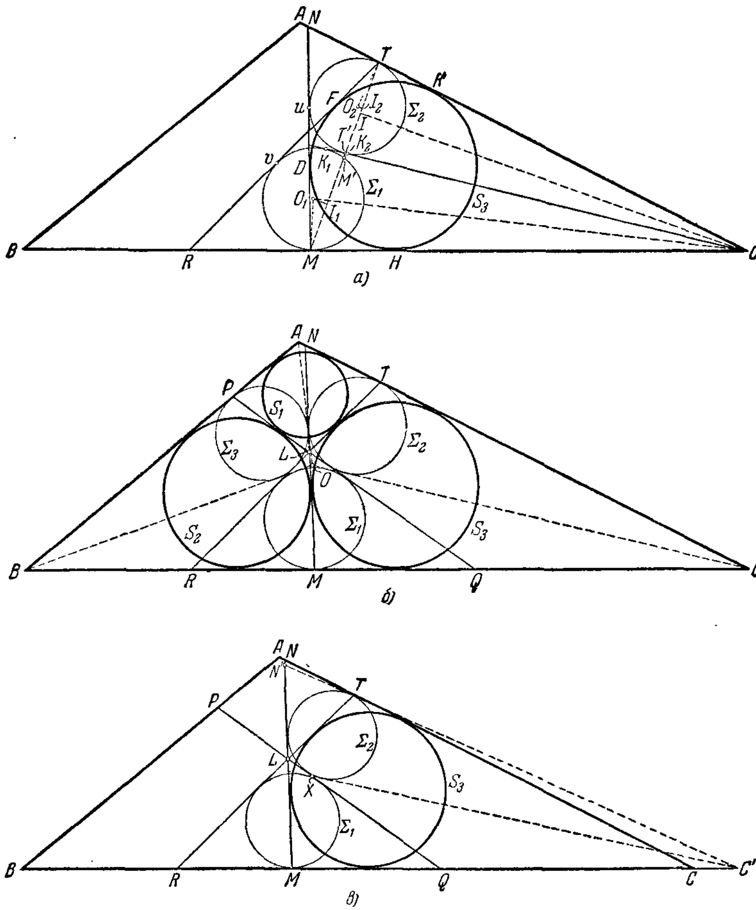
$$\frac{CM}{MO_1} = \frac{CT}{TO_2}.$$

Из последнего равенства вытекает, что углы MCO_1 и TCO_2 равны. А теперь если CK_1K_2 есть общая касательная окружностей Σ_1 и Σ_2, проходящая через C, то

$$\angle MCK_1 = 2\angle MCO_1 = 2\angle TCO_2 = \angle TCK_2,$$

что и требовалось доказать.

Точно так же доказывается, что касательная Σ_1 и Σ_3, проходящая через B, есть биссектриса угла B и что касательная



Черт. 180.

Σ_2 и Σ_3, проходящая через A, есть биссектриса угла A. Теперь уже ясно, что окружности Σ_1, Σ_2 и Σ_3 могут быть легко построены как вписанные в треугольники OBC, OAC и OAB (O есть точка пересечения биссектрис треугольника ABC — центр вписанной окружности), прямые MN, PQ и RT могут быть найдены как (отличные от биссектрис треугольника ABC) попарные общие внутренние касательные окружностей Σ_1, Σ_2 и Σ_3 и, наконец, искомые окружности S_1, S_2 и S_3 могут быть построены как вписанные в четырехугольники $APLT$, $BMLP$ и $CTLM$ (черт. 180, *б*).

В приведенном выше решении задачи у нас осталось недоказанным утверждение о том, что вторые внешние касательные Σ_1 и S_3 соответственно Σ_2 и S_3 и отличная от PQ общая внутренняя касательная Σ_1 и Σ_2 пересекаются в одной точке. Докажем теперь это.

Пусть вторая общая внутренняя касательная окружностей Σ_1 и Σ_2 пересекает прямые PQ и BC соответственно в точках X и C' (черт. 180, *в*); вторая касательная, проведенная из C' к Σ_2, пересекает MN в точке N'. Рассмотрим четырехугольники $LXC'R$ и $LXC'N'$, «описанные» соответственно вокруг окружностей Σ_1 и Σ_2. (Слово «описанные» мы взяли в кавычки, так как у одного из этих двух четырехугольников две стороны и продолжения двух других сторон касаются одной окружности.) Совершенно так же, как выводятся аналогичные предложения для обыкновенных описанных четырехугольников, получаем

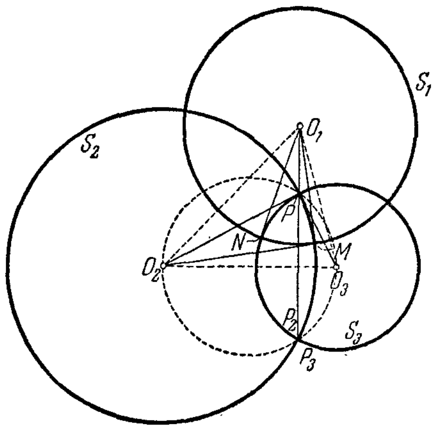
$$LR+C'X=LX+RC';$$
$$LX+N'C'=LN'+C'X.$$

Сложив эти два равенства, найдем

$$LR+N'C'=RC'+LN',$$

откуда следует, что в (невыпуклый) четырехугольник $LRC'N'$ можно «вписать» окружность (доказательство аналогично тому, которое имеет место, для выпуклых четырехугольников). Следовательно, $C'N'$ касается окружности S_3 (касающейся трех остальных сторон этого четырехугольника), т. е. $C'N'$ есть общая касательная Σ_2 и S_3 и C' совпадает с C, что и доказывает наше утверждение.

73. Предположим, что задача решена. Обозначим проведенные окружности с центрами в точках O_1, O_2 и O_3 соответственно через S_1, S_2 и S_3. Пусть M, N и P — точки пересечения окружностей S_1 и S_2, соответственно S_1 и S_3, S_2 и S_3 (черт. 181). Так как касательные к окружностям S_1 и S_2 в точке M перпендикулярны между собой, то касательная к S_2 в этой точке должна совпадать с радиусом O_1M окружности S_1 (и касательная к S_1 — с радиусом O_2M окружности S_2). Точно так же касательная к S_3 в точке N совпадает с радиусом O_1N окружности S_1. Соединим теперь точку O_1 с точкой P и пусть P_2 и P_3 — вторые точки пересечения прямой O_1P с окружностями S_2 и S_3. В силу известного свойства касательной к окружности мы будем иметь



Черт. 181.

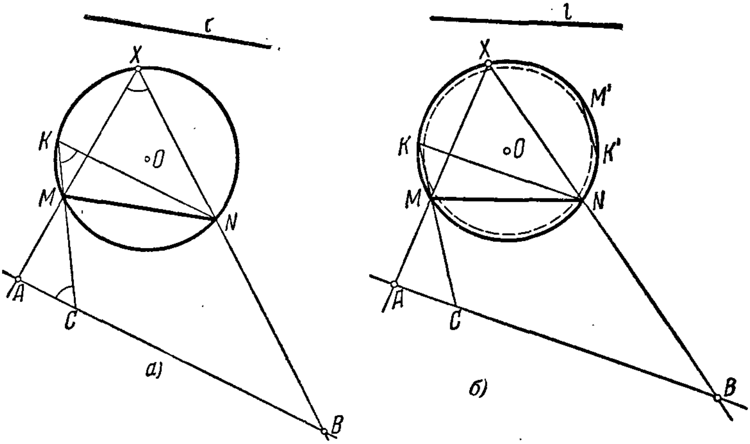
$$O_1M^2 = O_1P \cdot O_1P_2,$$
$$O_1N^2 = O_1P \cdot O_1P_3.$$

Но так как $O_1M = O_1N$, то отсюда мы заключаем, что $O_1P_2 = O_1P_3$, и следовательно, точки P_2 и P_3 совпадают: прямая O_1P проходит через вторую точку P' пересечения окружностей S_2 и S_3. Таким образом, мы видим, что точка P лежит на перпендикуляре к линии центров O_2O_3 окружностей S_2 и S_3, проходящем через точку O_1.

Теперь мы можем легко построить точку P, которая лежит с одной стороны на высоте треугольника $O_1O_2O_3$, проходящей через вершину O_1, а с другой стороны — на окружности, построенной на отрезке O_2O_3, как на диаметре (ибо, очевидно, $O_2P \perp O_3P$). После этого уже не представляет никакого труда построение окружностей S_2, S_3 и S_1.

Предоставляем читателю самостоятельно провести доказательство правильности нашего построения (требуется доказать, что если точка P строится, как указано, то окружность S_1 с центром в точке O_1, перпендикулярная к окружности S_2 с центром в точке O_2 и радиусом O_2P, будет перпендикулярна также и к окружности S_3 с центром в точке O_3 и радиусом O_3P).

Задача имеет единственное решение, если треугольник $O_1O_2O_3$ является остроугольным, и не имеет решений, если этот треугольник прямоугольный или тупоугольный



Черт. 182.

74. Допустим, что задача решена; пусть прямые AX и BX пересекают окружность соответственно в точках M и N, $MN \parallel l$ (черт. 182, *а*). Проведем через точку N прямую, параллельную AB, и обозначим через K точку ее пересечения с окружностью. Соединим K и M прямой и продолжим эту прямую до пересечения с AB в точке C. Рассмотрим треугольники AMC и AXB. Угол A у них общий:

$$\angle AXB = \angle ACM,$$

так как оба эти угла равны $\angle MKN$. Следовательно,

$$\triangle ACM \backsim \triangle AXB.$$

Из подобия треугольников получаем

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AC}{AX},$$

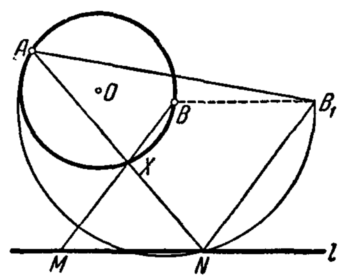
откуда

$$AM\cdot AX=AB\cdot AC.$$

Отсюда вытекает следующее построение. Проведем через A произвольную секущую, пересекающую окружность в точках M' и X'. Тогда

$$AX'\cdot AM'=AX\cdot AM=AB\cdot AC.$$

Пользуясь этим равенством, мы можем построить отрезок AC — четвертый пропорциональный к трем известным отрезкам AB, AX' и AM', а следовательно, найти точку C. $\angle KNM$ равен углу между AB и данной прямой l. Следовательно, он известен, а потому известна величина дуги, на которую он опирается, а значит, и величина хорды KM. Отложим ее в каком-нибудь месте окружности O. Пусть это будет хорда $K'M'$ (черт. 182, *б*). Проведем затем окружность S с центром в O, касающуюся хорды $K'M'$. Тогда, проведя через C касательную к этой окружности, найдем точку M. Соединив A с M, найдем точку X. Задача может иметь два решения, одно или ни одного (в зависимости от числа касательных, которые можно провести через точку C к окружности S).



Черт. 183.

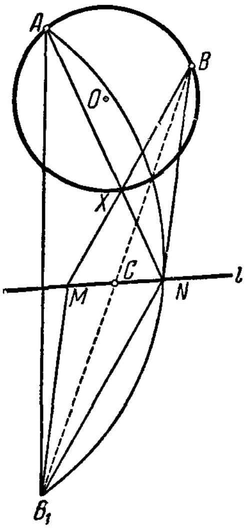
75. а) Допустим, что задача решена; $MN=a$ (черт. 183). Проведем из точки B отрезок BB_1, равный и параллельный отрезку MN. Тогда четырехугольник $BMNB_1$ есть параллелограмм и, следовательно, $\angle ANB_1=\angle AXB$. Но $\angle AXB$ известен, так как он опирается на данную дугу AB.

Отсюда получаем следующее построение. На прямой, проходящей через точку B, параллельно данной прямой l откладываем отрезок $BB_1=a$. На отрезке AB_1, как на хорде, описываем дугу, вмещающую тот же угол, что и дуга данной окружности, стягиваемая хордой AB. В пересечении построенной дуги с прямой l получаем точку N. Прямая AN пересечет окружность в искомой точке X. Для доказательства достаточно заметить, что прямая BX параллельна B_1N и, следовательно, фигура MBB_1N — параллелограмм.

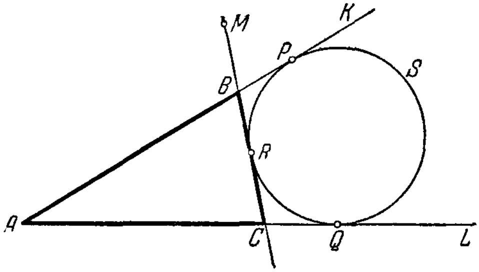
Задача может иметь два решения, одно или ни одного.

б) Предположим, что задача решена, $MC = CN$ (черт. 184). Построим точку B_1, симметричную с точкой B относительно точки C. Тогда четырехугольник BMB_1N есть параллелограмм (так как его диагонали делятся в точке пересечения пополам) и, следовательно, $\angle ANB_1 = \angle AXM$. А так как этот угол известен (он дополняет до 180° угол AXB, опирающийся на дугу AB), то мы можем найти точку N как точку пересечения прямой l с дугой, построенной на AB_1 и вмещающей известный угол; после этого X определяется как точка пересечения заданной окружности с прямой AN (ср. с решением задачи а)).

76. а) Пусть LAK есть данный угол, M — данная точка и $2p$ — данный периметр. Отложим на сторонах угла отрезки AQ и AP, равные p (черт. 185). Проведем окружность S, касающуюся



Черт. 184.

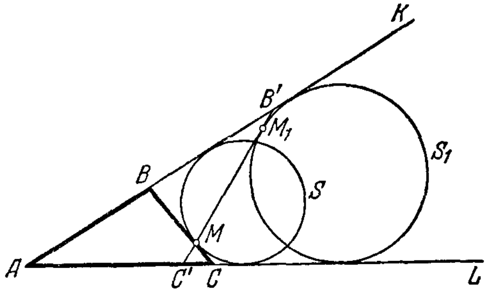


Черт. 185.

сторон угла в точках Q и P, и, наконец, проведем через точку M прямую MBC, касательную к окружности S в точке R. Отсеченный прямой MBC треугольник ABC — искомый. В самом деле, $BP=BR$ и $CQ=CR$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки. Отсюда

$$AB+BC+CA=AB+BR+CR+AC=$$
$$=AB+BP+CQ+CA=AP+AQ=2p.$$

б) Если точка M расположена вне данного угла, то периметр отсекаемого треугольника будет тем меньше, чем ближе расположена проведенная прямая к вершине угла A, и может быть сделан как угодно малым, т. е. искомого треугольника вообще не существует. Предположим теперь, что точка M расположена внутри угла. Через точку M проводим окружность S (бóльшую из двух возможных), касающуюся обеих сторон угла, и проводим в точке M касательную к окружности S



Черт. 186.

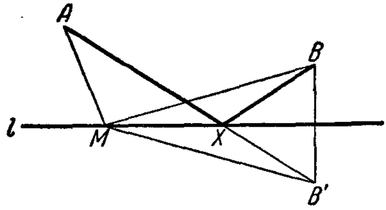
(черт. 186). Точки пересечения этой касательной со сторонами угла обозначим через B и C'. Треугольник ABC — искомый. Для доказательства заметим, что периметр треугольника ABC равен двойному расстоянию от точки A до точки касания окружности S со стороной угла (см. решение задачи а)). Проведем через M любую другую прямую, пересекающую стороны угла в точках B' и C', и построим окружность S_1, вневписанную в треугольник $B'AC'$. Точка M_1 касания $B'C'$ и S_1 отлична от M, причем M лежит вне S_1, откуда следует, что S_1 больше, чем S. Значит, расстояние от A до точки касания окружности S_1 со стороной угла, равное полупериметру треугольника $B'AC'$, больше соответствующей величины для треугольника BAC, что и требовалось доказать.

77. а) Пусть B' есть точка, симметричная с точкой B относительно прямой l (черт. 187). В таком случае для каждой точки M прямой l имеем

$$BM = B'M$$

и, следовательно,

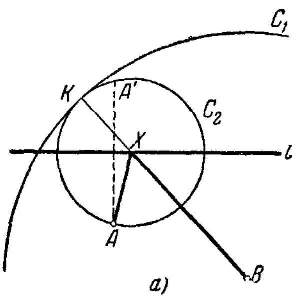
$$AM + MB = AM + MB'.$$

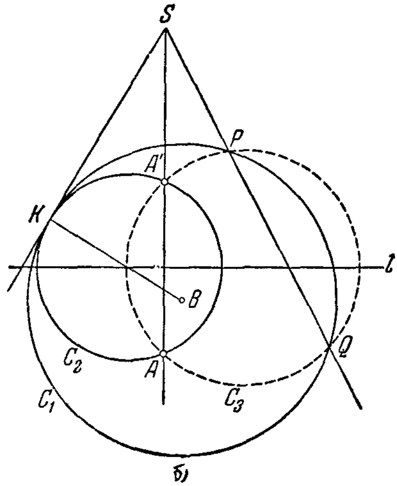


Черт. 187.

Но очевидно, что сумма $AM + MB'$ принимает наименьшее значение в том случае, когда точка M лежит на прямой AB'; таким образом, искомой точкой X будет служить точка пересечения прямой l с прямой AB'.

б) Предположим, что задача решена, и проведем окружность C_1 с центром в точке B, радиусом $BX + XA = a$ (черт. 188, *а*). Проведем, далее, окружность C_2 с центром в точке X, радиус которой равен AX. Очевидно, эти две окружности будут касаться друг друга в точке K, лежащей на продолжении прямой BX. Окружность C_2 пройдет через точку A и через точку A', симметричную точке A относительно прямой l.





Черт. 188.

Так как условие задачи позволяет нам построить окружность C_1 и точку A', то решение задачи сводится к построеению окружности C_2, проходящей через точки A и A' и касающейся окружности C_1; центр X этой окружности C_2 и будет, очевидно, искомой точкой.

Перейдем теперь к решению задачи о построении окружности C_2, проходящей через две данные точки A и A' и касающейся данной окружности C_1.

Предположим, что эта задача решена. Пусть общая касательной к окружностям C_1 и C_2 в их точке касания K пересекается с прямой AA' в точке S (черт. 188, *б*). В таком случае $SK^2 = SA' \cdot SA$. Обратно, если S есть такая точка прямой AA_1, что квадрат касательной SK из точки S к окружности C_1 равен произведению расстояний от точки S до точек A и A', то окружность C_2, проведенная через точки A, A', K, касается в точке K прямой SK, а следовательно, и окружности C_1. Таким образом, нам достаточно найти на прямой AA' точку S, удовлетворяющую условию $SA \cdot SA' = SK^2$ (где K — неизвестная точка соприкосновения окружности C_1 с касательной, проведенной из искомой точки S к этой окружности).

Пусть C_3 — произвольная окружность, проходящая через точки A и A' и пересекающая окружность C_1 в точках P и Q. Обозначим через S точку пересечения прямых AA' и PQ и покажем, что точка S удовлетворяет поставленным условиям. Действительно, если SK есть касательная, проведенная из точки S к окружности C_1 (K — точка касания), то

$$SA \cdot SA' = SP \cdot SQ$$

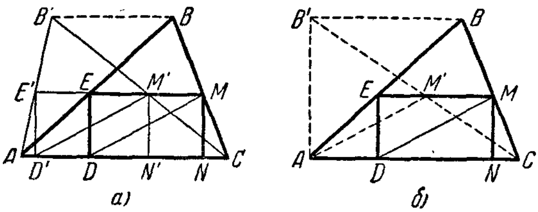
по свойству секущих к окружности C_3 и

$$SP \cdot SQ = SK^2$$

по свойству секущих к окружности C_1.

Окончательно мы приходим к следующему построению. Проводим окружность C_1 радиуса a с центром в точке B. Далее, через точку A и точку A', симметричную A относительно прямой l, проводим произвольную окружность C_3, пересекающую C_1 в точках P и Q, и из точки S пересечения прямых AA' и PQ проводим касательную SK к окружности C_1. Искомая точка X есть точка пересечения прямой l и радиуса BK окружности C_1.

78. а) и б) Пусть ABC — данный треугольник, $DEMN$ — вписанный в него прямоугольник (черт. 189, *а*). Рассмотрим треугольник $AB'C$, где $BB' \parallel AC$; пусть $D'E'M'N'$ есть впи-



Черт. 189.

санный в этот треугольник прямоугольник с той же высотой, что и прямоугольник $DEMN$. С одной стороны,

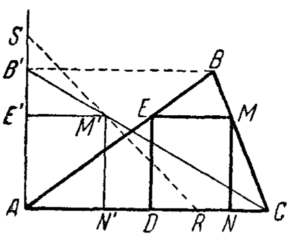
$$\triangle ABC \backsim \triangle BME,$$

а с другой,—

$$\triangle AB'C \backsim \triangle B'M'E'.$$

Отсюда следует, что $\frac{EM}{AC} = \frac{E'M'}{AC}$; значит $EM = E'M'$ и, следовательно, прямоугольники $DEMN$ и $D'E'M'N'$ равны.

Предположим теперь, что точка B' выбрана так, что треугольник $AB'C$ прямоугольный: $\angle B'AC = 90°$. Для прямоугольного треугольника $AB'C$ решение задач а) и б) очевидно (так, например, диагональ вписанного прямоугольника будет наименьшей, если она перпендикулярна к гипотенузе $B'C$). Отсюда следует и построение в общем случае (черт. 189, *б*).



Черт. 190.

Задача 78 а), очевидно, может иметь два, один или ни одного решения (если она имеет одно решение, то оно совпадает с решением задачи б)).

в) Как и в решении задачи 78 а) и б), легко показать, что для построения искомого треугольника достаточно вписать в прямоугольный треугольник $AB'C$ ($\angle B'AC = 90°$), катет которого AC совпадает с основанием данного треугольника ABC, а катет

AB' равен высоте треугольника ABC (черт. 190), прямоугольник $AE'M'N'$ данного периметра $2p$. Другими словами, надо найти на гипотенузе $B'C$ треугольника $AB'C$ точку M', сумма расстояний от которой до катетов AC и AB' имела бы данную величину p. Но геометрическое место точек внутри угла CAB', сумма расстояний от которых до сторон этого угла равна p, есть отрезок прямой l, пересекающей стороны угла в точках R и S таких, что $AR=AS=p$ (см. ниже задачу 83б). Следовательно, M' есть точка пересечения прямой l и гипотенузы $B'C$.

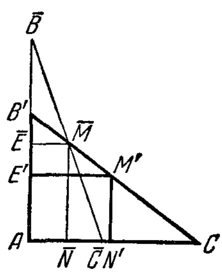
Задача имеет одно решение, если основание AC данного треугольника ABC меньше p, а высота $BP=B'A$ больше p или, наоборот, $AC>p$, а $BP<p$. Если $AC=BP=p$, задача является неопределенной: каждый прямоугольник $DEMN$, вписанный в треугольник ABC, имеет периметр $2p$. Во всех остальных случаях задача вовсе не имеет решений.

г) Для того чтобы площадь прямоугольника $AE'M'N'$ (черт. 191) была наибольшей, надо, чтобы сумма площадей треугольников $CM'N'$ и $B'E'M'$ была наименьшей. Но так как эти треугольники подобны (и подобны треугольнику $AB'C$), то их площади пропорциональны квадратам гипотенуз. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы отыскать на гипотенузе $B'C$ прямоугольного треугольника $AB'C$ такую точку M', чтобы сумма

$$CM'^2+M'B'^2$$

была возможно меньше. Но, очевидно,

$$CM'^2+M'B'^2=$$
$$=\frac{1}{2}[(CM'+M'B')^2+(CM'-M'B')^2]=$$
$$=\frac{1}{2}[CB'^2+(CM'-M'B')^2],$$



Черт. 191.

откуда следует, что сумма $CM'^2+M'B'^2$ будет наименьшей, когда разность $CM'-M'B'$ будет наименьшей по абсолютной величине, т. е. когда $CM'=M'B'=\frac{CB'}{2}$. Таким образом, высота $E'A$ искомого прямоугольника равна половине высоты $B'A$ треугольника $AB'C$; следовательно, и высота ED прямоугольника $DEMN$ равна половине высоты треугольника ABC.

Примечание. Можно и чисто геометрически доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в прямоугольный треугольник $AB'C$, наибольший по площади имеет вершину в середине M' гипотенузы $B'C$. Действительно, пусть $A\overline{E}\,\overline{M}\,\overline{N}$ — какой-то другой прямоугольник (черт. 191). Проведем через точку $\overline{M}$ прямую l, отрезок $\overline{C}\,\overline{B}$ которой между сторонами угла $\overline{C}AB'$ делится в точке $\overline{M}$ пополам (см. ниже решение задачи 142). Очевидно,

$$S_{AE'M'N'}=\frac{1}{2}S_{AB'C};\quad S_{A\overline{E}\overline{M}\overline{N}}=\frac{1}{2}S_{A\overline{B}\overline{C}}.$$

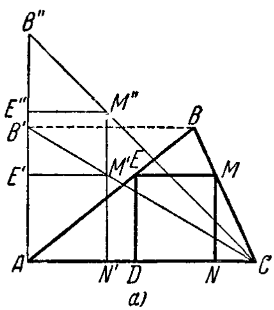
Но $S_{A\overline{B}\overline{C}}<S_{AB'C}$ (см. задачу 142), откуда и следует, что

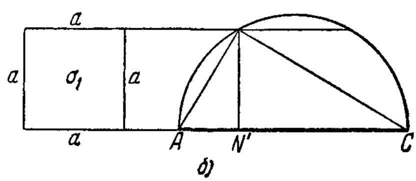
$$S_{AE'M'N'}>S_{A\overline{E}\overline{M}\overline{N}}.$$

д) Как и выше, достаточно вписать в прямоугольный треугольник $AB'C$ прямоугольник $AE'M'N'$ данной площади σ. Рассмотрим вспомогательный равнобедренный прямоугольный треугольник $AB''C$ (черт. 192, *а*). Очевидно,

$$S_{\triangle AB''C}=S_{\triangle AB'C}\cdot\frac{AB''}{AB'}=S_{\triangle AB'C}\cdot\frac{AC}{AB'}.$$

Постараемся теперь вписать в треугольник $AB''C$ прямоугольник $AE''M''N'$, площадь которого равна $\sigma\frac{AC}{AB'}=\sigma_1$. Если $AE''M''N'$ есть искомый прямоугольник, то $AN'\cdot N'M''=$ $=AN'\cdot N'C=\sigma_1$ (треугольник $CN'M''$ — равнобедренный); это





Черт. 192.

позволяет легко найти точку N' как основание высоты прямоугольного треугольника с гипотенузой AC и высотой, опущенной на гипотенузу, равной стороне a квадрата известной площади σ_1 (черт. 192, *б*).

Пусть теперь $AN'M'E'$ — прямоугольник, вписанный в $AB'C$ и имеющий основание AN'. Тогда, очевидно,

$$\frac{M'N'}{B'A} = \frac{CN'}{CA} = \frac{M''N'}{B''A},$$

откуда

$$\frac{M'N'}{M''N'} = \frac{B'A}{B''A}$$

и, следовательно,

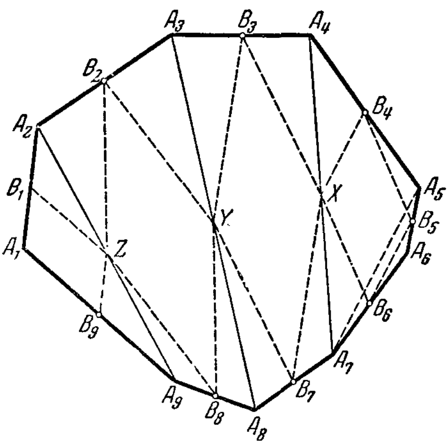
$$S_{AN'M'E'} = S_{AN'M''E''} \frac{M'N'}{M''N'} = \sigma_1 \frac{B'A}{B''A} = \sigma.$$

Задача имеет два решения, если

$$\sigma_1 < \left(\frac{AC}{2}\right)^2, \quad \sigma < \frac{AC \cdot AB'}{4} = \frac{S}{2},$$

где S — площадь треугольника ABC, одно решение, если $\sigma = \frac{S}{2}$, и ни одного, — если $\sigma > \frac{S}{2}$.

79. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ искомый девятиугольник, B_1, B_2, ..., B_9 — известные середины его сторон (B_1 — середина стороны A_1A_2, B_2 — середина стороны A_2A_3 и т. д.; черт. 193). Рассмотрим четырехугольник $A_4A_5A_6A_7$. Точки B_4, B_5, B_6 и середина X диагонали A_4A_7 являются серединами сторон этого четырехугольника. Так как отрезки B_4X и B_5B_6 оба параллельны A_5A_7 и равны половине A_5A_7 (как средние линии треугольников $A_4A_5A_7$ и соответственно $A_6A_5A_7$), то $B_4XB_6B_5$ есть параллелограмм, и так как точки B_4, B_5 и B_6 нам известны, то мы можем построить и точку X.



Черт. 193.

Рассмотрим теперь четырехугольник $A_3A_4A_7A_8$. Точки B_3, X, B_7 и середина Y отрезка A_3A_8 являются серединами сторон этого четырехугольника. Отсюда следует, что четырехугольник B_3XB_7Y есть параллелограмм, и мы можем построить точку Y — единственную не известную нам вершину этого параллелограмма.

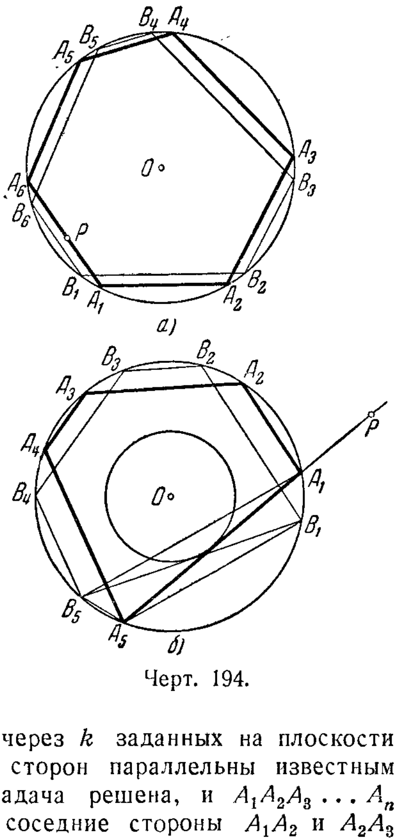
Рассмотрим, далее, четырехугольник $A_2A_3A_8A_9$. Как и выше, четырехугольник B_2YB_8Z, где Z есть середина отрезка A_2A_9 — параллелограмм, и, зная точки B_2, B_8 и Y, мы можем построить точку Z.

Рассмотрим, наконец, треугольник $A_1A_2A_9$. Точки B_1, B_9 и Z являются серединами сторон этого треугольника. Не представляет труда построить этот треугольник, середины сторон которого известны (точка A_1 является вершиной параллелограмма $A_1B_1ZB_9$, три остальные вершины которого известны). Зная точку A_1 и середины B_1 и B_9 отрезков A_1A_2 и A_1A_9, мы без труда найдем точки A_2 и A_9, далее, точно так же мы сможем найти точки A_3 и A_8 и т. д., пока мы не построим все вершины искомого девятиугольника.

Примечание. Аналогично можно построить по серединам сторон любой многоугольник с нечетным числом сторон.

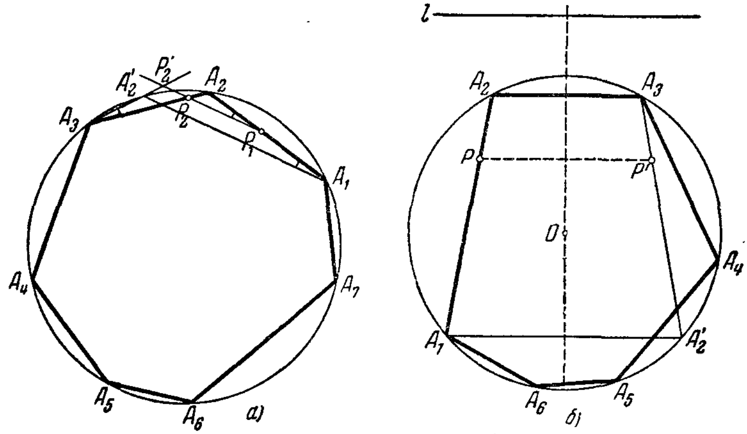
80. Будем решать задачу согласно указанию. Пусть требуется в данную окружность вписать многоугольник, у которого одна из сторон проходит через данную точку P, а остальные параллельны данным прямым (т. е. $k=1$).

Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — искомый многоугольник (черт. 194). Возьмем на окружности произвольную точку B_1 и построим ломаную $B_1B_2B_3 \ldots B_n$, звенья B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$ которой соответственно параллельны данным прямым. Тогда $\overset{\smile}{A_1B_1} = \overset{\smile}{A_2B_2} = \ldots = \overset{\smile}{A_{n-1}B_{n-1}} = \overset{\smile}{A_nB_n}$ как дуги, заключенные между параллельными хордами. Заметим, что по сравнению с первой дугой $\overset{\smile}{A_1B_1}$ направления дуг (от A_2 к B_2, от A_3 к B_3 и т. д.) все время меняются. Отсюда следует, что при k четном дуга $\overset{\smile}{A_kB_k}$ будет иметь направление, противоположное $\overset{\smile}{A_1B_1}$, а при k нечетном — то же самое направление. Если число сторон многоугольника n четное (как на черт. 194, a), то дуги $\overset{\smile}{A_1B_1}$ и $\overset{\smile}{A_nB_n}$ имеют противоположные направления; в этом случае, так как $\smile{A_1B_1} = \smile{A_nB_n}$, то $A_1A_n \| B_1B_n$. Но A_1A_n есть сторона искомого многоугольника и, следовательно, проходит через данную точку P. Теперь, чтобы определить точки A_n и B_n, достаточно через P провести прямую, параллельную B_nB_1; после этого уже не будет представлять труда найти остальные вершины искомого многоугольника. Если число сторон многоугольника n нечетное (как на черт. 194, *б*), то дуги A_1B_1 и A_nB_n равны и имеют одинаковое направление. В этом случае четырехугольник $A_1B_1A_nB_n$ представляет собой равнобедренную трапецию и, следовательно, $A_1A_n = B_1B_n$. Таким образом, для того чтобы найти точки A_n и A_1, нам остается через данную точку P провести хорду данной длины B_1B_n. Это легко сделать, так как равные хорды A_1A_n и B_1B_n равноудалены от центра окружности, т. е. касаются одной и той же окружности, концентрической с данной.



Черт. 194.

Перейдем теперь к общей задаче построения вписанного в данную окружность n-угольника, k смежных сторон которого (здесь может быть $k = n$) проходят через k заданных на плоскости точек, а остальные $n-k$ сторон параллельны известным направлениям. Пусть наша задача решена, и $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ есть такой n-угольник, две соседние стороны A_1A_2 и A_2A_3 которого проходят через известные точки P_1 и P_2, а из остальных сторон $n-k$ параллельны данным прямым и $k-2$ (а именно, A_3A_4, A_4A_5, ..., A_kA_{k+1}) проходят через известные точки (черт. 195, *а*). Покажем, что задача построения такого n-угольника равносильна задаче построения другого n-угольника, вписанного в ту же окружность, у которого $k-1$ смежных сторон проходят через данные точки, а $n-k+1$ сторон параллельны известным прямым. Действительно, заменим наш многоугольник многоугольником $A_1A_2'A_3 \ldots A_n$ (может быть самопересекающимся), у которого



Черт. 195.

сторона A_1A_2' параллельна P_1P_2. Сторона $A_2'A_3$ такого n-угольника пересекает прямую P_1P_2 в точке P_2', положение которой можно определить. Действительно, так как $\angle A_2'A_3A_2 = \angle A_2'A_1A_2 = \angle P_2P_1A_2$ (см. черт. 195, a), то треугольники $P_2A_3P_2'$ и $P_2P_1A_2$ подобны. Из подобия этих треугольников получаем $\frac{P_2P_2'}{P_2A_3} = \frac{P_2A_2}{P_2P_1}$, откуда $P_2P_2' = \frac{P_2A_3 \cdot P_2A_2}{P_2P_1}$. Но произведение $P_2A_3 \cdot P_2A_2$ зависит только от положения точки P_2 и, следовательно, известно нам; мы можем определить теперь и отрезок P_2P_2', т. е. положение точки P_2'.

Точно так же можно привести задачу построения n-угольника $A_1A_2'A_3 \ldots A_n$ к задаче построения нового n-угольника $A_1A_2'A_3'A_4 \ldots A_n$, вписанного в ту же окружность, у которого

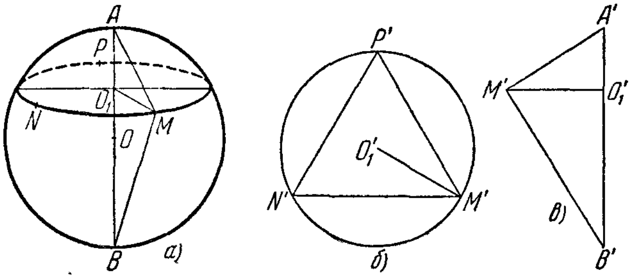
$k-2$ смежных сторон $A_3'A_4$, A_4A_5, ..., A_kA_{k+1} проходят через известные точки, а остальные стороны параллельны данным направлениям. Продолжая этот процесс, мы в конце концов придем к задаче построения n-угольника, вписанного в данную окружность, у которого одна сторона проходит через известную точку, а все остальные параллельны заданным направлениям. Эта же задача решена выше.

Замечание. При помощи описанного выше приема можно решить также более общую задачу о построении вписанного в данную окружность n-угольника, у которого k (не обязательно смежных) сторон проходят через известные точки, а остальные параллельны заданным направлениям. Действительно, нетрудно показать, что задачу построения такого n-угольника можно свести к задаче построения другого n-угольника, вписанного в ту же окружность, у которого k *смежных* сторон проходят через фиксированные точки, а остальные стороны параллельны известным направлениям. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что многоугольник $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, сторона A_1A_2 которого проходит через известную точку P, а сторона A_2A_3 параллельна известному направлению l, можно заменить вписанным в ту же окружность многоугольником $A_1A_2'A_3 \ldots A_n$ (может быть, самопересекающимся), у которого сторона A_1A_2' параллельна известному направлению, а сторона $A_2'A_3$ проходит через заданную точку. Действительно, предположим, что сторона A_1A_2' многоугольника $A_1A_2'A_3 \ldots A_n$ параллельна направлению l (черт. 195, *б*). В таком случае четырехугольник $A_1A_2A_3A_2'$ есть равнобедренная трапеция и сторона A_1A_2 симметрична $A_2'A_3$ относительно оси симметрии этой трапеции, т. е. прямой, перпендикулярной к l, проходящей через центр окружности. Следовательно, $A_2'A_3$ проходит через точку P', симметричную P относительно этой прямой, что и требовалось доказать.

81. Проведем на поверхности шара из произвольной ее точки A, как из центра, какую-нибудь окружность. Выберем на этой окружности какие-нибудь три точки M, N, P (черт. 196, *а*) и, измерив расстояния между ними, циркулем перенесем эти расстояния на плоскость (лист бумаги). Тогда мы построим треугольник $M'N'P'$, равный MNP (черт. 196, *б*).

Описав около него окружность и отложив ее радиус, мы найдем отрезок $M'O_1'$, равный перпендикуляру MO_1, опущенному из точки M на диаметр шара AB. По катету $M'O_1'$

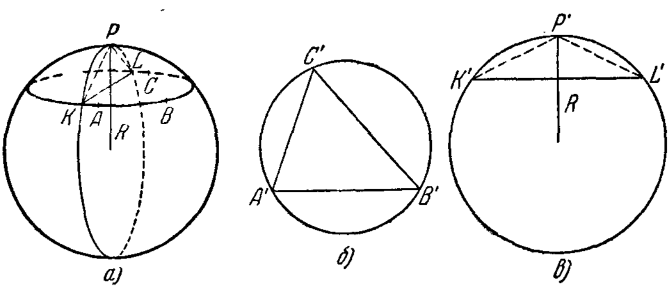
и гипотенузе $A'M'$, равной первоначальному раствору циркуля AM, строим теперь прямоугольный треугольник $M'O_1'A'$ (черт. 196, *в*). Через точку M' проводим прямую, перпендикулярную к $M'A'$, до пересечения в точке B' с продолжением



Черт. 196.

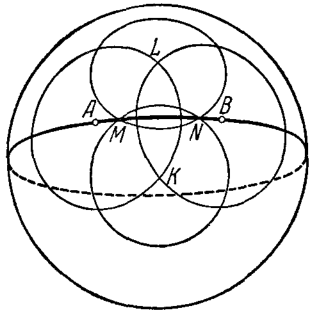
катета $A'O_1'$. Тогда отрезок $A'B'$ будет равен диаметру AB шара.

82. а) Пусть A, B и C (черт. 197, *а*) — заданные точки. Построим на плоскости треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC, и опишем около него окружность (черт. 197, *б*).



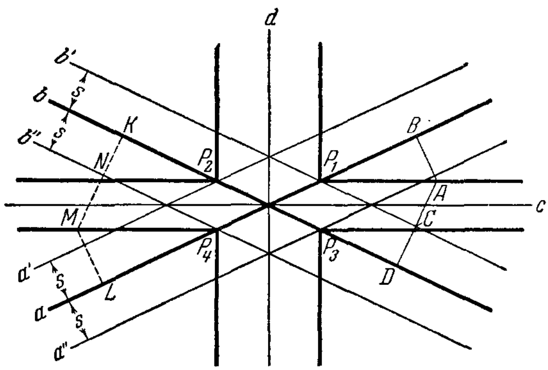
Черт. 197.

Мы можем найти (см. задачу 81) радиус R шара или, что то же самое, радиус большого круга. Проведем на плоскости круг радиуса R (черт. 197, *в*) и засечем на нем хорду $K'L'$, равную диаметру круга, описанного около треугольника $A'B'C'$. Расстояние от K' до середины P' дуги, стягивающей хорду $K'L'$, есть, очевидно, расстояние от каждой из точек A, B и C до «эпицентра» окружности на шаре, проходящей через точки A, B и C. Таким образом, проводя из точек A и, скажем, B окружности такого радиуса, мы получим в точке их пересечения «эпицентр» искомой окружности.



Черт. 198.

б) Пусть A и B — заданные точки. Проведем из них, как из «эпицентров», окружности одинакового радиуса. Пусть K и L — точки пересечения этих окружностей. (Здесь существенно, что A и B не являются концами одного диаметра, так как в этом случае проведенные окружности либо слились бы, либо не пересеклись.) Проведем из точек K и L, как из «эпицентров», пару пересекающихся окружностей одинакового радиуса. Пусть точки их пересечения суть M и N. Тогда точки M и N лежат на искомой окружности (черт. 198). По трем точкам, например A, B и M, мы построим искомую окружность (см. предыдущую задачу).



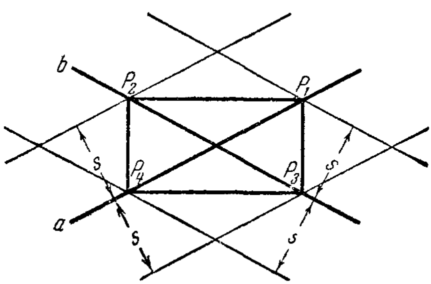
Черт. 199.

83. а) Проведем прямые b' и b'', параллельные b и удаленные от нее на расстояние s (черт. 199). Они пересекают прямую a соответственно в точках P_1 и P_4, принадлежащих искомому геометрическому месту. Поступим аналогично с прямой a. Тогда на прямой b найдем еще две точки P_2 и P_3 геометрического места. Пусть c и d — биссектрисы углов между прямыми a и b. Проведем теперь через P_1 два взаимно перпендикулярных луча: один — параллельный биссектрисе c и не пересекающийся с d, другой — параллельный биссектрисе d и не пересекающийся с c. Аналогичные лучи проведем из точек P_2, P_3, P_4. Тогда, если, например, A — точка, лежащая на том из этих лучей, который проведен из P_1 параллельно c, то она лежит на биссектрисе угла между b' и a. Следовательно (см. черт. 199), $AB=AC$, а так как $CD=s$, то

$$AD-AB=AC+CD-AB=CD=s.$$

Таким образом, каждая точка построенных лучей принадлежит искомому геометрическому месту.

Обратно, пусть M — какая-нибудь точка геометрического места. Опустим из M перпендикуляр MK на b и ML на a. Пусть $MK>ML$. Отложим на MK отрезок $MN=ML$. Тогда точка N удалена от прямой b на расстояние s, ибо $NK=$ $=MK-MN=s$. Поэтому N лежит либо на b', либо на b''.



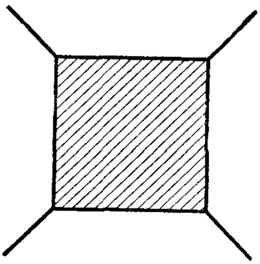
Черт. 200.

Пусть, например, N лежит на b''. Из $MN=ML$ следует, что M лежит на биссектрисе угла между a и b'. Но ни одна из точек отрезка P_4P_2, так же как ни одна из точек отрезка P_4P_3, кроме концов этих отрезков, не может принадлежать искомому геометрическому месту, так как для этих точек не разность, а сумма расстояний до прямых a и b равна s. Следовательно, M лежит на одном из рассмотренных выше лучей.

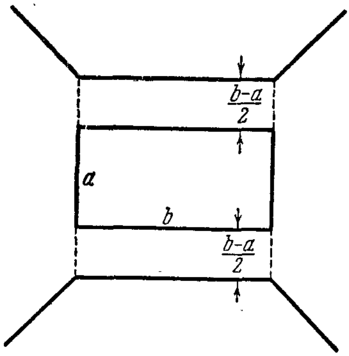
Итак, искомое геометрическое место состоит из восьми лучей с вершинами в точках P_1, P_2, P_3, P_4.

б) Совершенно аналогично решению задачи а) можно показать, что искомым геометрическим местом будет прямоугольник, изображенный на черт. 200.

84. а) Искомое геометрическое место, очевидно, состоит из всех точек квадрата и биссектрис углов, вертикальных к углам квадрата (черт. 201). (Полное доказательство этого предоставляем читателю.)



Черт. 201.



Черт. 202.

б) Искомое геометрическое место состоит из двух отрезков, параллельных бо́льшим сторонам прямоугольника, и четырех лучей, параллельных биссектрисам углов, вертикальных к углам прямоугольника (черт. 202). (Полное доказательство, использующее результат задачи 83 а), предоставляется читателю.)

85. Пусть для определенности

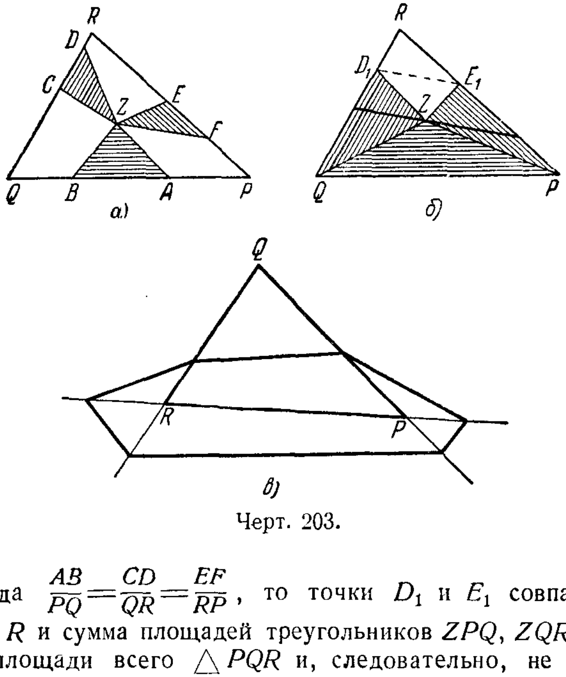
$$\frac{AB}{PQ} \geqslant \frac{CD}{QR} \geqslant \frac{EF}{RP} \qquad (*)$$

(черт. 203, *а*). Отложим на стороне QR отрезок $QD_1 = CD\frac{PQ}{AB}$ и на стороне PR отрезок $PE_1 = FE\frac{PQ}{AB}$ (черт. 203, *б*). В силу неравенств (*) $QD_1 \leqslant QR$ и $PE_1 \leqslant PR$; таким образом, построенные точки D_1 и E_1 лежат на самих сторонах QR и соответственно PR (а не на их продолжениях).

Тогда

$$S_{\triangle ZAB}+S_{\triangle ZCD}+S_{\triangle ZEF}=\frac{AB}{PQ}(S_{\triangle ZPQ}+S_{\triangle ZQD_1}+S_{\triangle ZPE_1})=$$
$$=\frac{AB}{PQ}(S_{PQD_1E_1}-S_{\triangle ZD_1E_1}).$$

Отсюда следует, что для точек Z искомого геометрического места площадь $S_{\triangle ZD_1E_1}$ должна быть постоянной. Поэтому искомым геометрическим местом является отрезок прямой, параллельной D_1E_1 и проходящей через точку Z_0, заключенной внутри треугольника PQR (черт. 203, *б*).



Черт. 203.

Когда $\frac{AB}{PQ}=\frac{CD}{QR}=\frac{EF}{RP}$, то точки D_1 и E_1 совпадают с точкой R и сумма площадей треугольников ZPQ, ZQR и ZRP равна площади всего $\triangle PQR$ и, следовательно, не зависит от положения точки Z. Поэтому искомым геометрическим местом в этом случае служит весь треугольник PQR.

Замечание. Можно обобщить задачу, рассматривая точки Z и вне треугольника. В этом случае обычно уславливаются приписывать площади треугольника знак плюс, если он лежит по ту же сторону от общей с PQR стороны, что и весь треугольник PQR, и знак минус — в противном случае. Тогда нашим геометрическим местом будет вся прямая параллельная D_1E_1. Доказательство этого утверждения дословно повторяет вышеизложенное, если только под площадью треугольника понимать определенную нами площадь «со знаком». Можно, однако, считать все площади положительными. В этом случае решение задачи несколько усложняется, но в общих чертах остается прежним. Найти его мы предоставляем читателю (соответствующее геометрическое место изображено на черт. 203, *в*).

86. Пусть M — середина стороны BC (черт. 204). Так как треугольник ABC прямоугольный, то $BM = AM$. Вследствие перпендикулярности OM к хорде BC имеем

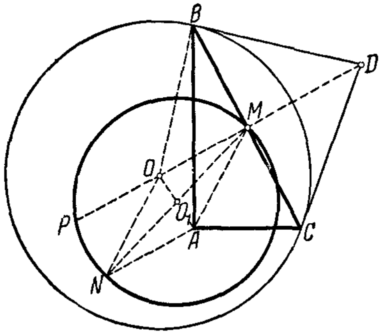
$$OM^2 + AM^2 = OM^2 + MB^2 = OB^2 = R^2, \qquad (*)$$

где R есть радиус данной окружности. Дополним теперь треугольник OMA до параллелограмма $OMAN$, и пусть точка O_1 — середина отрезка OA — есть точка пересечения диагоналей этого параллелограмма. Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, то из равенства (*) имеем

$$AO^2 + MN^2 = 2OM^2 + 2AM^2 = 2R^2,$$

откуда

$$O_1M^2 = \frac{2R^2 - AO^2}{4}.$$



Черт. 204.

Таким образом, расстояние O_1M не зависит от положения точек B и C на окружности, т. е. точка M описывает окружность с центром в точке O_1 и радиусом $r = \frac{\sqrt{2R^2 - AO^2}}{2}$.

Пусть теперь BD и CD — касательные к рассматриваемой окружности в точках B и C (черт. 204). Соединим точку D с центром O окружности. OD пересекает отрезок BC в его середине M. Пусть P есть вторая точка пересечения

OD с окружностью, являющейся геометрическим местом точек M. В силу известного свойства окружности произведение $OM \cdot OP = k$ не зависит от положения точек B и C. Далее из прямоугольного треугольника OBD следует

$$OM \cdot OD = OB^2 = R^2.$$

Таким образом, мы получаем

$$OP = \frac{k}{OM}, \quad OD = \frac{R^2}{OM},$$

т. е.

$$OD = \frac{R^2}{k} OP.$$

Последнее равенство означает, что геометрическое место точек D получается из окружности, являющейся геометрическим местом точек P (и точек M), преобразованием подобия с центром подобия в точке O и коэффициентом подобия $\frac{R^2}{k}$. Следовательно, геометрическое место точек D тоже является окружностью.

87. Пусть ABC (черт. 205, a) — какое-то положение треугольника. Проведем радиусы $O_1B = R$ и $O_2C = r$ и рассмотрим равнобедренные треугольники O_1AB и O_2AC. Очевидно, $\angle BAO_1 + \angle CAO_2 = 2d - d = d$. Отсюда $\angle BAO_1 + \angle ABO_1 + \angle CAO_2 + \angle ACO_2 = 2d$ и поэтому $\angle AO_1B + \angle AO_2C = 2d$, откуда следует, что $O_1B \parallel O_2C$. Предположим сначала, что $R \neq r$, например $R > r$ (как на черт. 205, a). Тогда $O_1O_2 \nparallel BC$ (так как иначе четырехугольник O_1O_2CB был бы параллелограммом и R равнялось бы r). Поэтому BC пересекает прямую O_1O_2 в некоторой точке M. Положение точки M не зависит от положения точек B и C: действительно, из подобия треугольников MBO_1 и MCO_2 получаем

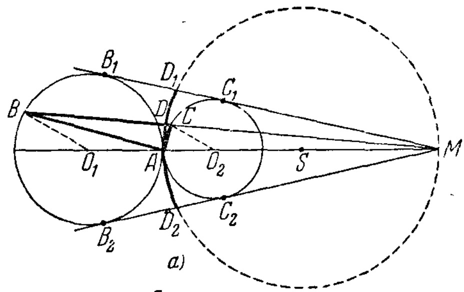
$$\frac{O_1O_2}{O_2M} = \frac{R-r}{r},$$

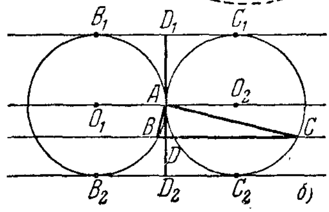
откуда следует

$$O_2M = \frac{r}{R-r} O_1O_2 = r\frac{R+r}{R-r},$$

т. е. O_2M зависит только от радиусов окружностей C_1 и C_2. Точка M, как легко вывести из полученного выражения для O_2M, будет внешним центром подобия окружностей O_1 и O_2, т. е. совпадает с точкой пересечения их общих внешних касательных B_1C_1 и B_2C_2. Обратно, проводя через M любую секущую и проведя соответствующие хорды, мы получаем прямоугольный треугольник ABC, удовлетворяющий условиям задачи (для доказательства этого факта надо все изложенные выше рассуждения провести в обратном порядке).

Таким образом, всевозможные положения точки D — основания высоты треугольника ABC — суть основания перпендикуляров, опущенных из точки A на лучи, проходящие через





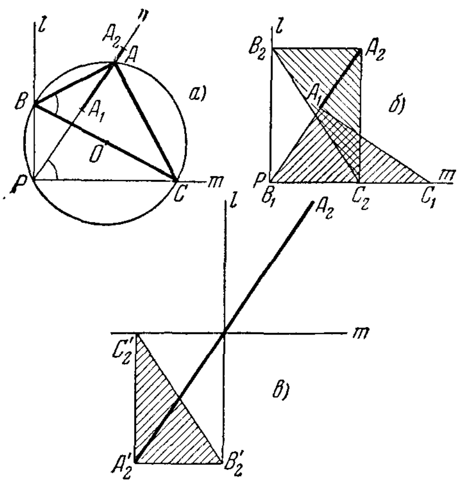
Черт. 205.

точку M и заключенные внутри угла между общими внешними касательными данных окружностей. Поэтому искомое геометрическое место — дуга D_1D_2 окружности, построенной на AM, как на диаметре, заключенная внутри угла B_1MB_2.

Если $R=r$, то $BC \parallel O_1O_2$ (черт. 205, *б*). Аналогично предыдущему показываем, что искомым геометрическим местом будет отрезок общей внутренней касательной, заключенный между общими внешними касательными.

Заметим, что, в то время как прямой угол A поворачивается на 360°, точка D пробегает дугу (или отрезок) D_1D_2 дважды — в одном и в другом направлениях.

88. Пусть B лежит на стороне l, а C — на стороне m прямого угла с вершиной P (черт, 206, *а*). Построим на BC, как на диаметре, окружность O. Так как $\angle A = \angle P = d$, то A и P лежат на этой окружности. $\angle APC = \angle ABC$, как опирающиеся на одну и ту же дугу. Поэтому точка A при движении треугольника ABC должна все время лежать на луче n, проходящем через точку P и образующем с лучом m угол, равный $\angle B$. Так как AP — хорда окружности O с диаметром BC, то AP не может превышать диаметра BC



Черт. 206.

(легко видеть, что AP может быть равно BC; см. черт. 206, *б*). Минимальной величине AP должна соответствовать минимальная из хорд, у которых один конец находится в точке A, а другой лежит на $\smile BPC$. Если $AB < AC$, то, очевидно, минимальной хордой будет сам катет AB (см. черт. 206, *б*). Ясно, что при движении $\triangle ABC$ точка A опишет весь отрезок A_1A_2 (где $PA_1 = AB$, а $PA_2 = BC$), так как для каждого отрезка PA, где $PA_1 < PA < PA_2$, мы сможем найти соответствующую этому отрезку хорду окружности O и соответствующее положение $\triangle ABC$ (а может быть, и два положения). Таким образом, длина отрезка, служащего искомым геометрическим местом $A_1A_2 = BC - AB$, где AB — меньший катет треугольника ABC.

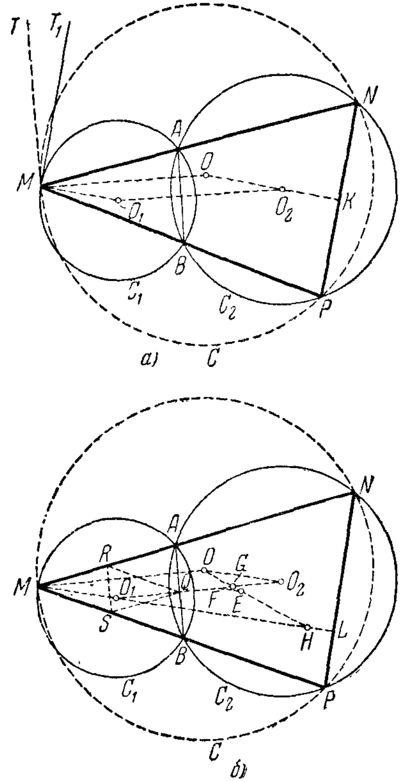
Замечание. При решении задачи мы предполагали, что точки B и C движутся соответственно по лучам l и m. Если же точке B разрешить двигаться по всей прямой l, а точке C — по всей прямой m, то результат несколько изменится. Легко видеть, что точка A по-прежнему должна находиться на прямой (но не на луче n) и будет описывать отрезок $A_2A_2' = 2BC$ (см. черт. 206, *в*). Доказательство этого утверждения, которое мы предоставляем читателю провести самостоятельно, аналогично изложенному выше.

89. а) Отметим сначала, что треугольники MNP и MAB подобны: $\angle MAB = \angle MPN$ (так как $\angle MAB + \angle BAN = 180°$, $\angle BPN + \angle BAN = 180°$); аналогично $\angle MBA = \angle MNP$. Далее, пусть MT_1 есть касательная в точке M к окружности C_1, MT — касательная в этой же точке к окружности C, описанной около треугольника MNP (черт. 207, *а*). В таком случае $\angle T_1MA$ измеряется половиной дуги MA окружности C_1 и, следовательно, равен углу MBA; аналогично $\angle TMN = \angle MPN$. Из равенств $\angle T_1MA = \angle MBA = \angle MNP$ и $\angle TMN = \angle MPN = \angle MAB$ следует, что $MT_1 \parallel NP$, $MT \parallel AB$.

Пусть O_1 и O_2 суть соответственно центры окружностей C_1 и C_2, O — центр окружности C. Так как $MT \parallel AB$, то OM параллельно отрезку O_1O_2, перпендикулярному к хорде AB; так как $MT_1 \parallel NP$, то O_1M параллельно перпендикуляру O_2K, опущенному из O_2 на хорду NP. Но так как последний перпендикуляр делит NP пополам, то он, очевидно, проходит через центр O окружности C.

Итак, четырехугольник MO_1O_2O есть параллелограмм, $O_2O = O_1M$. Таким образом, *геометрическим местом точек O при различных положениях точки M служит окружность, центр которой совпадает с центром C_2, а радиус равен радиусу C_1.*

Далее, пусть радиус окружности C_1, описанной около треугольника MAB, равен r_1; радиус OM окружности C, описанной около треугольника MNP, равен d ($d = O_2O_1$, так как O_2O_1MO — параллелограмм). Следовательно, коэффициент подобия треугольников MNP и MAB равен $\frac{d}{r_1}$. Пусть ML — высота треугольника MNP, H — точка пересечения высот этого треугольника (черт. 207, *б*). Рассмотрим еще треугольник QRS, образованный средними линиями треугольника MAB. Очевидно, что этот треугольник подобен MAB с коэффициентом подо-



Черт. 207.

бия $\frac{1}{2}$. Следовательно, треугольник MNP подобен QRS с коэффициентом подобия $\frac{2d}{r_1}$. Далее легко видеть, что точка O_1 есть точка пересечения высот треугольника QRS (ибо перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника MAB в их серединах, являются одновременно высотами треугольника QRS). Положим $QO_1 = \delta$. Так как O_1Q есть перпендикуляр, опущенный из O_1 на AB, то QO_1 и MH — сходственные отрезки треугольников QRS и MNP и

$$\frac{MH}{O_1Q}=\frac{2d}{r_1}; \quad MH=\frac{2d\delta}{r_1}.$$

Так как $MO_1 \parallel OK$, а $OK \perp NP$ (черт. 207, *а*), то ML проходит через O_1. Теперь имеем

$$O_1H=MH-O_1M=\frac{2d\delta}{r_1}-r_1=\frac{2d\delta-r_1^2}{r_1}.$$

Таким образом, **геометрическим местом точек** H **служит окружность с центром в точке** O_1 **и радиусом** $\frac{2d\delta-r_1^2}{r_1}$ (если $2d\delta=r_1^2$, то точка H остается неподвижной).

Наконец, отметим, что точка E пересечения медиан треугольника MNP лежит на отрезке OH (черт. 207, *б*) и делит этот отрезок в отношении $\frac{OE}{EH}=\frac{1}{2}$ (см. решение задачи 98). Отрезки O_1H и O_2O параллельны между собой (оба они перпендикулярны к NP); проведем из точки E прямую EF, параллельную O_1H и O_2O и пересекающую O_1O_2 в точке F. Рассматривая пересекающиеся прямые O_1O_2 и OH, пересеченные параллельными прямыми O_1H, FE и O_2O, находим: $\frac{O_1F}{FO_2}=\frac{HE}{EO}=\frac{2}{1}$; следовательно, положение точки F на отрезке O_1O_2 не зависит от выбора точки M. Далее, пусть G есть точка пересечения прямых O_1O_2 и HO. Из подобных треугольников O_1HG и FEG имеем $\frac{O_1H}{FE}=\frac{O_1G}{FG}=\frac{O_1F}{FG}+1$; из подобных треугольников O_2OG и FEG имеем

$$\frac{O_2O}{FE}=\frac{O_2G}{FG}=\frac{O_2F}{FG}-1.$$

Но так как $O_1F=2O_2F$, то получаем

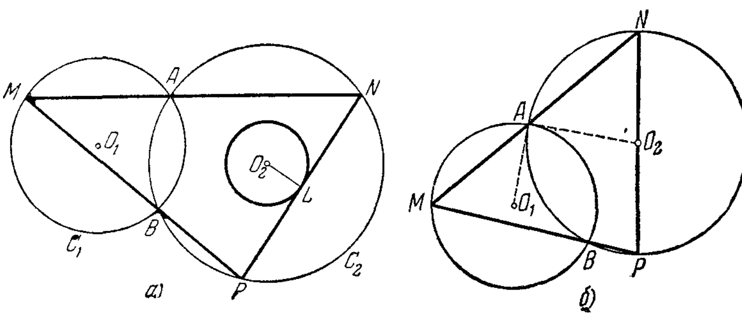
$$\frac{O_1H}{FE}-1=2\left(\frac{O_2O}{FE}+1\right),$$

откуда

$$FE=\frac{O_1H-2O_2O}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2d\delta-r_1^2}{r_1}-2r_1\right)=\frac{2d\delta-3r_1^2}{3r_1}.$$

Итак, точка E описывает окружность с центром в такой точке F отрезка O_1O_2, что $O_1F:FO_2=$ $=2:1$, и радиусом $\frac{2d\delta-3r_1^2}{3r_1}$ (если $2d\delta=3r_1^2$, то точка E остается неподвижной).

б) Угол NMP (черт. 208, *а*) опирается на постоянную дугу AB окружности C_1 и поэтому не зависит от выбора точки M. Но, с другой стороны, этот угол измеряется полуразностью дуг NP и AB окружности C_2. Отсюда следует, что дуга NP окружности C_2 остается постоянной (она равна



Черт. 208.

сумме дуги AB окружности C_1 и дуги AB окружности C_2). Отсюда следует, что и расстояние O_2L хорды NP от центра O_2 окружности C_2 не зависит от точки M: хорда NP все время касается постоянной окружности с центром в точке O_2. Особо следует отметить случай, когда сумма дуг AB окружностей C_1 и C_2 равна 180° (т. е. окружности C_1 и C_2 перпендикулярны; см. выше); в этом случае дуга NP равна 180° и хорда NP все время проходит через центр O_2 окружности C_2 (черт. 208, *б*).

90. а) Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Пусть для определенности точка M лежит внутри этой окружности, P, Q, R — проекции этой точки на стороны треугольника (черт. 209, *а*). Соединим точку M с вершинами A, B и C треугольника; пусть D и E — точки пересечения прямых AM и BM с описанной окружностью. Соединим, кроме того, точку D с точкой B. Так как вокруг четырехугольников $APMQ$ и $BQMR$ можно описать окружности, то

$$\angle PQM = \angle PAM \text{ и } \angle MQR = \angle MBR$$

(как углы, опирающиеся на одни и те же дуги). Кроме того, имеем

$$\angle PAM = \angle CBD$$

(по той же причине). Следовательно,

$$\angle CAM = \angle DMC - \angle ACM = \angle PQM = \angle CBD,$$
$$\angle MQR = \angle CBE,$$

отсюда (см. черт. 209, *а*)[1])

$$\angle PQR = \angle PQM + \angle MQR = \angle DBC + \angle EBC = \angle EBD.$$

Вычислим теперь площадь треугольника PQR. Имеем

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} PQ \cdot QR \sin \angle PQR = \frac{1}{2} PQ \cdot QR \sin \angle EBD.$$

Но так как AM и BM суть диаметры окружностей, описанных около четырехугольников $APMQ$, соответственно $BQMR$, то

$$PQ = AM \cdot \sin \angle A, \quad QR = BM \cdot \sin \angle B.$$

Кроме того, из треугольника BMD имеем

$$\frac{MB}{MD} = \frac{\sin \angle MDB}{\sin \angle MBD};$$

$$MB \sin \angle MBD = MD \sin \angle MDB = MD \sin \angle C.$$

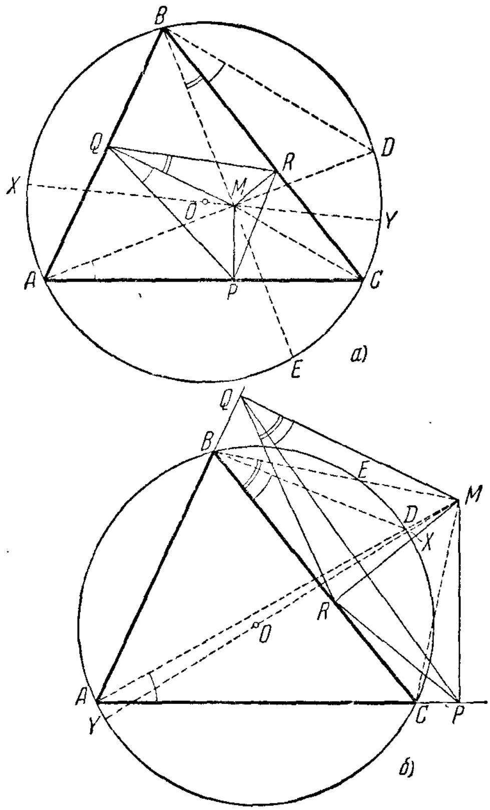
Таким образом,

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} PQ \cdot QR \sin EBD = \frac{1}{2} AM \sin A \cdot BM \sin B \cdot \sin EBD =$$
$$= \frac{1}{2} AM \sin A \sin B \cdot MB \sin EBD = \frac{1}{2} AM \cdot MD \sin A \sin B \sin C.$$

---

[1]) Чтобы сделать эти рассуждения независимыми от чертежа, надо воспользоваться понятием направленных углов (см., например, написанные Д. И Перепелкиным решения задач в книге Ж. Адамара «Элементарная геометрия», ч. I, М., Учпедгиз, 1948 г. стр. 488—489).

Аналогичные рассуждения приводят к тому же результату и в случае, когда точка M лежит вне окружности, описанной вокруг треугольника ABC (черт. 209, *б*) (подробное проведение



Черт. 209.

этих рассуждений предоставляем читателю). Все дальнейшие наши рассмотрения относятся сразу к обоим этим случаям.

Обозначим теперь расстояние от M до центра O окружности, описанной около треугольника ABC, через d, а радиус описанной окружности — через R.

Если X и Y — точки пересечения прямой OM с окружностью, описанной около треугольника ABC, то

$$AM\cdot MD = XM\cdot MY = (R+d)\cdot[\pm(R-d)] = \pm(R^2-d^2),$$

где знак плюс относится к тому случаю, когда M лежит внутри окружности, описанной около треугольника ABC, а знак минус — к тому случаю, когда M лежит вне этой окружности. Таким образом,

$$S_{\triangle PQR} = \pm\frac{1}{2}(R^2-d^2)\sin A\sin B\sin C.$$

Полученную формулу можно еще несколько преобразовать. Обозначим стороны треугольника ABC через a, b и c, а площадь — через S. Тогда

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C = 2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

Таким образом,

$$\sin A\sin B\sin C = \frac{S}{2R^2}$$

и, следовательно,

$$S_{\triangle PQR} = \pm\frac{1}{4}\left(1-\frac{d^2}{R^2}\right)S,$$

где знак плюс относится к тому случаю, когда точка M находится внутри описанной окружности треугольника ABC, а знак минус — к случаю, когда M находится вне этой окружности. Если площадь треугольника PQR равна заданной величине σ, то из последней формулы мы получаем

$$\frac{d^2}{R^2} = 1\pm 4\frac{\sigma}{S}.$$

Таким образом, при $0<\frac{\sigma}{S}<\frac{1}{4}$ мы получаем в качестве искомого геометрического места две окружности радиусов $\sqrt{1-4\frac{\sigma}{S}}\,R$ и $\sqrt{1+4\frac{\sigma}{S}}\,R$, концентрические с описанной окружностью; при $\frac{\sigma}{S}>\frac{1}{4}$ — только одну окружность радиуса $\sqrt{1+4\frac{\sigma}{S}}$. При $\frac{\sigma}{S}=\frac{1}{4}$ искомым геометрическим местом служит окружность радиуса $R\sqrt{2}$ и одна единственная точка — центр описанной окружности. При $\sigma = 0$ геометрическим местом точек служит сама описанная окружность, т. е. *геометрическое место точек плоскости, проекции которых на стороны данного треугольника лежат на одной прямой, есть окружность, описанная около треугольника* (см. ниже задачу 124).

б) Искомое геометрическое место будет, вообще говоря, окружностью (или парой концентрических окружностей; возможные исключения будут указаны в конце решения). Или точнее: площадь σ многоугольника, вершинами которого являются основания проекций некоторой точки M плоскости на стороны данного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$, равна абсолютной величине выражения $a^2 - \alpha d$:

$$\sigma = \pm(a^2 - \alpha d^2), \qquad (*)$$

где d есть расстояние от точки M до некоторой постоянной (для данного многоугольника) точки O, a — некоторый постоянный (для данного многоугольника) отрезок, α — постоянное (для данного многоугольника) число. При этом знак $+$ или $-$ в формуле (*) зависит от того, совпадает ли порядок обхода вершин полученного многоугольника (в порядке: сначала проекция M на A_1A_2, затем — проекция на A_2A_3 и т. д.) с порядком обхода вершин $A_1, A_2, A_3, \ldots$ исходного многоугольника или противоположен этому направлению.

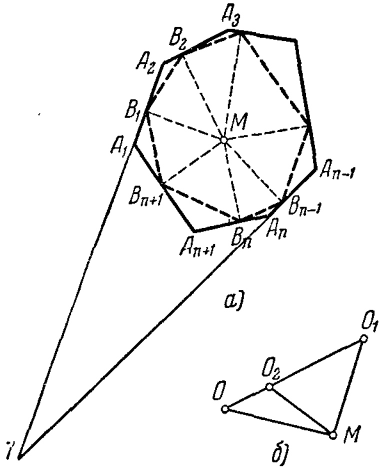
Доказательство проведем методом математической индукции. А именно, предположим, что формула (*) доказана уже для каждого n-угольника, и докажем, что в таком случае она справедлива так же и для $(n+1)$-угольника $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ (отметим, что для треугольника эта формула была выведена в решении задачи 90 а)): (в этом случае $a^2 = \frac{1}{4}S$, $\alpha = \frac{S}{4R^2}$). Проекции точки M на стороны $(n+1)$-угольника $A_1A_2 \ldots$ $\ldots A_nA_{n+1}$ обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_n, B_{n+1}$ (черт. 210,*а*). Отметим теперь, что $(n+1)$-угольник $B_1B_2 \ldots B_nB_{n+1}$ можно представить себе как объединение n-угольника $B_1B_2 \ldots B_n$ и треугольника $B_nB_{n+1}B_1$. Точку пересечения продолжений сторон A_2A_1 и A_nA_{n+1} $(n+1)$-угольника обозначим через T. Тогда если σ, σ_1 и σ_2 соответственно площади $(n+1)$-угольника $B_1B_2\ldots B_nB_{n+1}$ n-угольника $B_1B_2\ldots B_n$ и треугольника $B_1B_nB_{n+1}$, то, учитывая, что формула (*) справедлива, по предположению, для n-угольника $TA_2A_3\ldots A_n$ и треугольника TA_1A_{n+1}, мы будем иметь

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2,$$

$$\sigma_1=a_1^2-\alpha_1d_1^2,$$

$$\sigma_2=-(a_2^2-\alpha_2d_2^2);$$

здесь d_1 и d_2 — расстояния точки M от двух фиксированных точек O_1 и O_2; a_1 и a_2 — постоянные отрезки; α_1 и α_2 — постоянные числа (в выражении для σ_2 стоит знак «—», так как направление обхода треугольника $B_{n+1}B_nB_1$ противоположно направлению обхода треугольника $A_1A_{n+1}T$; для простоты мы в доказательстве ограничиваемся рассмотрением случая, изображенного на черт. 210).



Черт. 210.

Пусть теперь d — расстояние от точки M до такой точки O на продолжении отрезка O_1O_2, что $OO_1:OO_2=\alpha_2:\alpha_1$ (черт. 210, *б*). В таком случае из треугольников MO_1O и MO_2O имеем

$$d_1^2=d^2+O_1O^2-2d\cdot O_1O\cos\angle MOO_1,$$

$$d_2^2=d^2+O_2O^2-2d\cdot O_1O\cos\angle MOO_2.$$

Умножим первое из этих равенств на O_2O, а второе — на O_1O и вычтем одно из другого:

$$O_2O\cdot d_1^2-O_1O\cdot d_2^2=(O_2O-O_1O)\,d^2+O_1O\cdot O_2O\,(O_1O-O_2O)=$$
$$=O_1O_2d^2-OO_1\cdot OO_2\cdot O_1O_2.$$

Или, так как $O_2O=\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}O_1O_2$, $O_1O=\frac{\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}O_1O_2$,

$$\alpha_1 d_1^2-\alpha_2 d_2^2=(\alpha_1-\alpha_2)\,d^2-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}O_1O_2^2.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2=a^2-\alpha d^2,$$

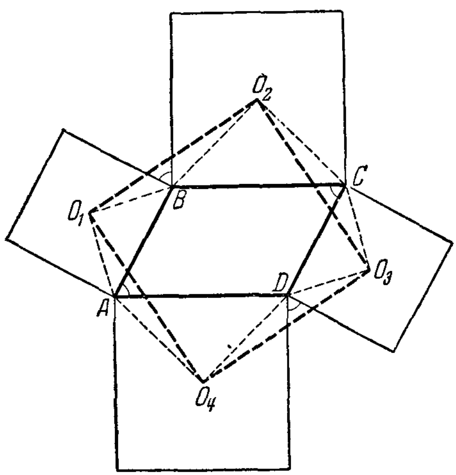
где

$$a^2=a_1^2-a_2^2-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}O_1O_2^2,\quad \alpha=\alpha_1-\alpha_2,$$

что и доказывает формулу (*).

Из формулы (*) в точности, как в заключительной части решения задачи 90 а), выводим, что искомое геометрическое место представляет собой окружность или пару окружностей.

Если же коэффициент α в формуле (*) равен нулю ($\alpha_1=\alpha_2$), то площадь $\sigma=a^2$ вовсе не зависит от точки M, и искомое геометрическое место или не существует, или совпадает со всей плоскостью. (Так будет, например, в том случае, когда многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ есть квадрат, или, более общо, произвольный параллелограмм; рекомендуем читателям самостоятельно разобрать геометрически этот случай.)



Черт. 211.

91. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм и O_1, O_2, O_3, O_4 центры квадратов, построенных соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA (черт. 211). Треугольники AO_1O_4, BO_1O_2, CO_2O_3 и DO_3O_4 равны, так как

$$AO_1=BO_1=CO_3=DO_3;\qquad AO_4=BO_2=CO_2=DO_4$$

и $\angle O_1AO_4=\angle O_1BO_2=\angle O_2CO_3=\angle O_3DO_4$.

Стороны O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 и O_4O_1 лежат в этих треугольниках против равных углов и, следовательно, равны.

Наконец,

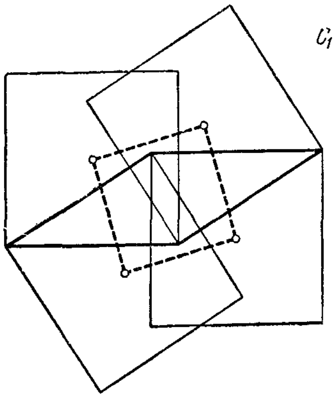
$$\angle O_1O_2O_3 = \angle BO_2C + \angle O_1O_2B - \angle O_3O_2C = \angle BO_2C = 90°.$$

Аналогично

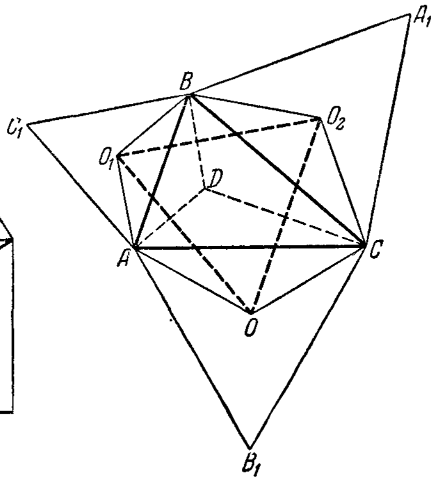
$$\angle O_2O_3O_4 = \angle O_3O_4O_1 = \angle O_4O_1O_2 = 90°.$$

Таким образом, четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ — квадрат.

Примечание. Совершенно аналогично можно показать, что центры квадратов, построенных на сторонах какого-либо параллелограмма по ту же сторону от сторон, по какую расположен сам параллелограмм, тоже образуют квадрат (черт. 212).



Черт. 212.



Черт. 213.

92. Первое решение. Пусть O_1 и O_2 — центры равносторонних треугольников ABC_1 и BCA_1, построенных на сторонах AB и BC какого-то треугольника ABC, O — вершина равностороннего треугольника O_1O_2O, построенного на O_1O_2 (черт. 213). Докажем, что O есть центр равностороннего треугольника CAB_1, построенного на стороне CA треугольника ABC.

Заметим предварительно, что если N — произвольная точка плоскости и точки M и P соответственно симметричны N

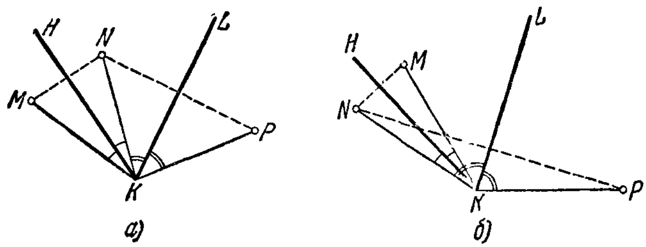
относительно сторон HK и KL некоторого угла $HKL=\alpha$ (черт. 214), то точка P получается из точки M поворотом на угол 2α вокруг точки K. В самом деле, очевидно $MK=$ $=NK=PK$. Далее, если точка N лежит внутри угла HKL (черт. 214, *а*), то

$$\angle MKP=\angle MKN+\angle NKP=2\angle HKN+2\angle NKL=$$
$$=2\angle HKL=2\alpha.$$

Если же N лежит вне угла HKL (черт. 214, *б*), то[1])

$$\angle MKP=\angle NKP-\angle NKM=2\angle NKL-2\angle NKH=$$
$$=2\angle HKL=2\alpha.$$

Повернем теперь точку B вокруг O_1 на 120° по часовой стрелке (см. черт. 213); так как $O_1A=O_1B$ и $\angle AO_1B=120^\circ$,



Черт. 214.

точка B перейдет при этом в точку A. Аналогично, поворот на 120° вокруг точки O_2 переводит B в C.

Рассмотрим, далее, точку D, симметричную точке B относительно прямой O_1O_2. Так как $\angle OO_1O_2=60^\circ$, то в силу сделанного выше замечания симметрия относительно O_1O должна перевести D в точку, получаемую из B поворотом вокруг O_1 на 120°, т. е. в точку A. Аналогично, симметрия относительно O_2O переводит D в C. Отсюда в силу того же замечания вытекает, что A переводится в C поворотом вокруг O на $2\angle O_1OO_2=120^\circ$. Следовательно, $OA=OC$ и $\angle AOC=$ $=120^\circ$, откуда $\angle OAC=\angle OCA=30^\circ$, т. е. O есть центр треугольника ACB_1.

---

[1]) См. сноску на стр. 237.

Второе решение. Обозначим стороны треугольника ABC через a, b и c. Пусть O_1, O_2 и O — центры равносторонних треугольников AC_1B, BA_1C и CB_1A, построенных на сторонах треугольника ABC (см. черт. 213). Очевидно,

$$\angle OAO_1 = \angle A + \angle OAC + \angle O_1AB = \angle A + 30^\circ + 30^\circ = \\ = \angle A + 60^\circ, \quad OA = \frac{b\sqrt{3}}{3}, \; O_1A = \frac{c\sqrt{3}}{3},$$

как радиусы кругов, описанных вокруг равносторонних треугольников со стороной b, соответственно c. Из треугольника O_1AO по теореме косинусов получаем

$$OO_1^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} + 2\,\frac{bc}{3}\cos(\angle A + 60^\circ) = \\ = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} + 2\,\frac{bc}{3}\cos A\cos 60^\circ - 2\,\frac{bc}{3}\sin A\sin 60^\circ = \\ = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} + \frac{bc}{3}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{3}\,bc\sin A = \\ = \frac{1}{6}\,(2b^2 + 2c^2 + 2bc\cos A + 2\sqrt{3}\,bc\sin A] = \\ = \frac{1}{6}\,[b^2 + c^2 + (b^2 + c^2 + 2\,bc\cos A) + 2\sqrt{3}bc\sin A] = \\ = \frac{1}{6}\,(b^2 + c^2 + a^2 + 4\sqrt{3}\,S),$$

так как $b^2 + c^2 + 2bc\cos A = a^2$, а $bc\sin A = 2S$ — удвоенной площади треугольника ABC.

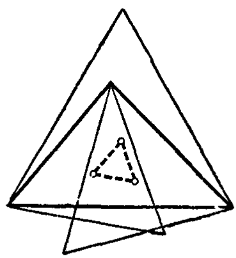
Совершенно аналогично выводим

$$OO_2^2 = \frac{1}{6}\,(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,S)$$

и

$$O_1O_2^2 = \frac{1}{6}\,(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,S);$$

следовательно, $OO_1 = OO_2 = O_1O_2$. Это нам и требовалось доказать.



Черт. 215.

Примечание. Совершенно аналогично можно показать, что центры равносторонних треугольников, построенных на сторонах какого-либо треугольника по ту же сторону от сторон, по какую расположен сам треугольник, тоже образуют равносторонний треугольник (черт. 215).

93. Проведем через точку P прямую, параллельную AB (черт. 216); пусть R — точка пересечения этой прямой с AC. Тогда $AR=\frac{AC}{n}$ и $PR=\frac{DC}{n}=\frac{AB}{n}$. Из подобия треугольников AQB и PQR имеем

$$\frac{QR}{AQ}=\frac{PR}{AB}=\frac{1}{n}, \quad QR=\frac{AQ}{n}.$$

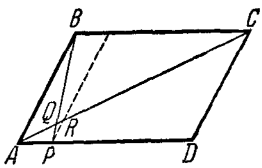
Следовательно,

$$AQ=AR-QR=\frac{AC}{n}-\frac{AQ}{n},$$

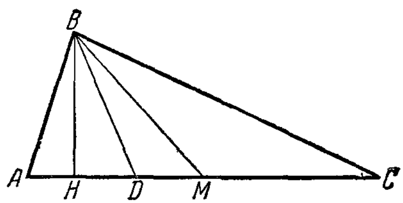
откуда

$$AQ=\frac{AC}{n+1}.$$

94. Первое решение. Пусть в треугольнике ABC точки H, D, M суть соответственно основания высоты, бис-



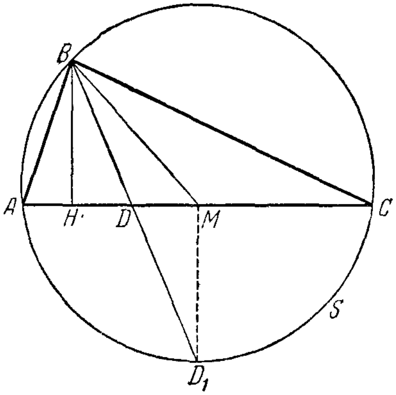
Черт. 216.



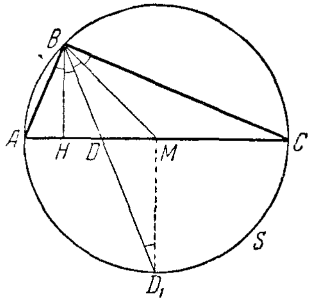
Черт. 217.

сектрисы и медианы, проведенных из вершины B (черт. 217). Если $AB=BC$, то треугольник равнобедренный и точки H, D и M совпадают. Пусть теперь $AB<BC$; тогда $\angle A>\angle C$ и, следовательно, $\angle ABH<\angle HBC$. Отсюда вытекает, что $\angle ABH<\frac{\angle ABC}{2}$, т. е. $\angle ABH<\angle ABD$ и точка H лежит на отрезке AD. Далее, в силу известного свойства биссектрисы $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$; следовательно, $AD<DC$. Отсюда вытекает, что $AD<\frac{AC}{2}$, т. е. $AD<AM$ и точка M лежит на отрезке CD. Следовательно, D лежит между H и M.

Второе решение. Пусть снова в треугольнике ABC точки H, D и M будут соответственно основаниями высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершины B (черт. 218). Опишем около треугольника ABC окружность, и пусть D_1 — точка пересечения BD с этой окружностью. В таком случае D_1 есть середина дуги AC и, следовательно, прямая, проведенная через точку D_1 параллельно BH (т. е. перпендикулярно к AC), проходит через точку M — середину хорды AC. Отсюда сразу следует, что D лежит между H и M.



Черт. 218.



Черт. 219.

95. Пусть ABC — данный треугольник, BH, BD и BM — высота, биссектриса и медиана этого треугольника, которые делят угол B на четыре равные части (черт. 219). Опишем вокруг треугольника ABC окружность S и продолжим биссектрису треугольника до пересечения с окружностью в точке D_1; точку D_1 соединим с серединой M стороны AC. Так как D_1 есть середина дуги AD_1C, то D_1M есть перпендикуляр к хорде AC, т. е. $D_1M \parallel HB$. Отсюда заключаем, что $\angle BD_1M = \angle DBH$, а так как по условию $\angle DBH = \angle DBM$, то

$$\angle BD_1M = \angle DBM \quad \text{и} \quad BM = MD_1.$$

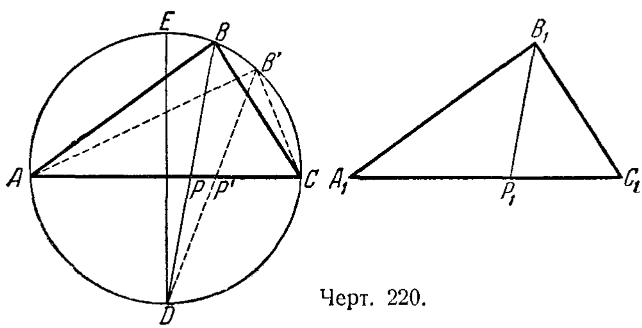
Отсюда вытекает, что перпендикуляр к отрезку BD_1 в его середине, на котором лежит центр окружности S, проходит через точку M. А так как перпендикуляр D_1M к хорде AC в ее середине также должен проходить через центр описанной окружности S, то точка M есть центр описанной вокруг ABC окружности и угол ABC — прямой.

Теперь уже совсем просто определить остальные углы треугольника ABC:

$$\angle BCA = \angle ABH = \frac{1}{4} d = 22°30',$$

$$\angle BAC = \angle CBH = \frac{3}{4} d = 67°30'.$$

96. Докажем, что если у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 220) равны основания AC и A_1C_1, углы B и B_1 и биссектрисы BP и B_1P_1 этих углов, то треугольники равны. Для



Черт. 220.

этого опишем около треугольника ABC окружность и проведем диаметр $DE \perp AC$. Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы их основания совпали, а вершина B_1 перешла в точку B', лежащую по ту же сторону диаметра DE и хорды AC, что и вершина B. Пусть биссектриса B_1P_1 переходит при этом в отрезок $B'P'$. При этом B' будет лежать на окружности ABC, так как $\angle AB'C = \angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$. Предположим, что B' не совпадает с B; так как точка D является серединой дуги AC, то продолжения обеих биссектрис BP и $B'P'$ проходят через точку D.

Пусть, например, будет $\smile DCB > \smile DCB'$. Тогда $DB > DB'$ и $DP < DP'$ (так как проекция DP на прямую AC меньше). Следовательно,

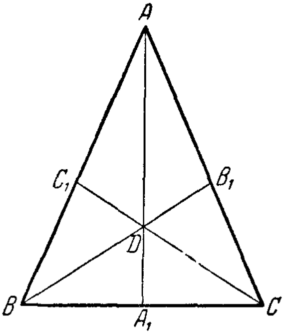
$$BP = BD - DP > B'D - DP' = B'P',$$

что противоречит условию $BP = B'P' = B_1P_1$.

Таким образом, точка B' должна совпасть с B, т. е. треугольники ABC и $AB'C$ равны, откуда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

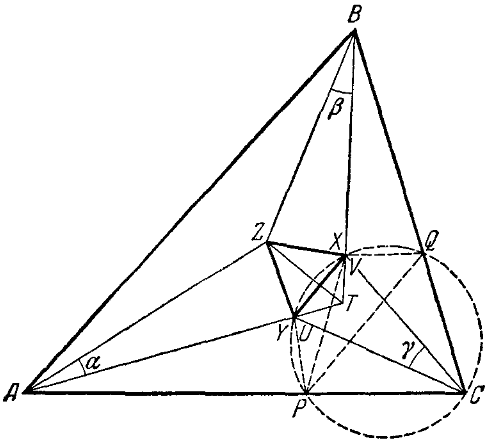
Пусть теперь ABC — данный треугольник, а CC_1 и BB_1 — его биссектрисы (черт. 221). Проведем биссектрису AB_1. Тогда в треугольниках ABB_1 и ACC_1 равны основания ($BB_1 = CC_1$), биссектрисы углов при вершине (общая биссектриса AD) и углы при вершине (угол A). Следовательно, эти треугольники равны. А отсюда $AB = AC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный.

Замечание. В сущности мы доказали даже несколько больше того, что требовалось. А именно, мы доказали, что если в треугольнике ABC равны какие-либо два отрезка CC_1 и BB_1 (где C_1 — точка стороны AB, а B_1 — точка стороны AC), пересекающиеся на биссектрисе угла A, то треугольник равнобедренный.



Черт. 221.

97. Первое решение. Обозначим углы треугольника ABC через 3α, 3β и 3γ (черт. 222); так как



Черт. 222.

$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180°$, то $\alpha + \beta + \gamma = 60°$. Пусть T — точка пересечения прямых AY и BX. Так как AZ и BZ суть биссектрисы треугольника ATB, то TZ также есть биссектриса этого треугольника и

$$\angle ATZ = \angle ZTB = \frac{\angle ATB}{2} = \frac{180^\circ - 2\alpha - 2\beta}{2} = \\ = \frac{60^\circ + 2\gamma}{2} = 30^\circ + \gamma.$$

Построим теперь правильный треугольник, одной вершиной которого является точка Z, а две другие вершины лежат на прямых AT и BT. Для этого проведем через точку Z две прямые под углом 30° к ZT. Пусть U и V — точки пересечения этих прямых с отрезками AT и BT. Из равенства треугольников TZU и TZV (имеющих равные углы и одну общую сторону) следует, что $ZU = ZV$; следовательно, ZUV — равнобедренный треугольник, угол при вершине которого равен 60°, т. е. равносторонний треугольник.

Докажем теперь, что треугольник ZUV совпадает с треугольником ZYX. Для этого отразим симметрично точку Z относительно прямых AT и BT; мы получим точки P и Q, которые в силу равенств $\angle ZAT = \angle CAT$ и $\angle ZBT = \angle CBT$ лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC. Подсчитаем углы PUV и UVQ. Имеем $\angle ZVU = 60^\circ$, $\angle ZVB = 30^\circ + (30^\circ + \gamma) = 60^\circ + \gamma$ (внешний угол треугольника ZVT), $\angle QVB = \angle ZVB$; отсюда следует, что

$$\angle QVU = 360^\circ - 60^\circ - 2(60^\circ + \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Точно так же доказывается, что $\angle PUV = 180^\circ - 2\gamma$.

Из того, что $\angle PUV = \angle UVQ$ и $PU = ZU = ZV = QV$, следует, что четырёхугольник $PUVQ$ является равнобочной трапецией. Опишем около этой трапеции окружность. Так как углы UPV и UVP опираются на равные дуги окружности (ибо хорды UV и UP равны: $UP = UZ = UV$), то

$$\angle UPV = \angle UVP = \frac{180^\circ - \angle PUV}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\gamma)}{2} = \gamma,$$

откуда $\angle PVQ = (180^\circ - 2\gamma) - \gamma = 180^\circ - 3\gamma$. Так как $\angle PCQ = 3\gamma$, то отсюда следует, что описанная вокруг трапеции $PUVQ$ окружность пройдет и через точку C. А теперь из равенства дуг PU, UV и VQ мы заключаем, что $\angle PCU = \angle UCV = \angle VCQ = \gamma$, откуда и следует, что треугольник ZUV совпадает с треугольником ZYX.

Второе решение. Обозначим снова $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$; $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $BZ = u$, $BX = v$ (см. черт. 222); диаметр описанной вокруг треугольника ABC окружности обозначим через d. По теореме синусов имеем $a = d \sin A = d \sin 3\alpha$, $b = d \sin 3\beta$, $c = d \sin 3\gamma$; далее, по этой же теореме из треугольника BXC находим

$$v = \frac{a}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} \sin\gamma = \frac{d \sin 3\alpha}{\sin(120^\circ + \alpha)} \sin\gamma = \frac{d \sin 3\alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)} \sin\gamma$$

(последнее следует из очевидных равенств $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$, $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$, $\beta + \gamma = 60^\circ - \alpha$).

Но легко видеть, что

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\alpha\right] =$$
$$= 4\sin\alpha(\sin^2 60^\circ - \sin^2\alpha) =$$
$$= 4\sin\alpha(\sin 60^\circ + \sin\alpha)(\sin 60^\circ - \sin\alpha) =$$
$$= 4\sin\alpha \cdot 2\sin\frac{60^\circ + \alpha}{2}\cos\frac{60^\circ - \alpha}{2} \cdot 2\cos\frac{60^\circ + \alpha}{2}\sin\frac{60^\circ - \alpha}{2} =$$
$$= 4\sin\alpha\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha).$$

Следовательно, мы получаем

$$v = 4d\sin\alpha\sin\gamma\sin(60^\circ + \alpha).$$

Совершенно аналогично доказывается

$$u = 4d\sin\alpha\sin\gamma\sin(60^\circ + \gamma).$$

Теперь по теореме косинусов из треугольника BXZ имеем

$$XZ^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\beta =$$
$$= 16d^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma[\sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \gamma) -$$
$$- 2\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ + \gamma)\cos\beta].$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$(60^\circ + \alpha) + (60^\circ + \gamma) + \beta = 120^\circ + \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Следовательно, имеется треугольник с углами $60°+\alpha$, $60°+\gamma$, β; если диаметр описанной окружности этого треугольника равен 1, то стороны его равны $\sin(60°+\alpha)$, $\sin(60°+\gamma)$, $\sin\beta$, и по теореме косинусов мы получаем

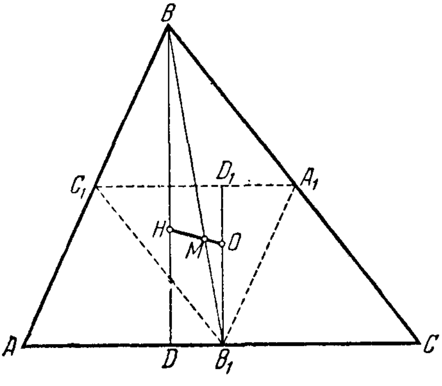
$$\sin^2\beta = \sin^2(60°+\alpha)+\sin^2(60°+\gamma) - \\ - 2\sin(60°+\alpha)\sin(60°+\gamma)\cos\beta.$$

Воспользовавшись этим, окончательно находим следующее выражение для длины стороны XZ треугольника XYZ:

$$XZ = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

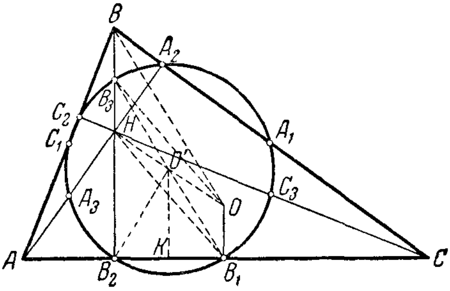
Точно так же доказывается, что $XY = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ и $YZ = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; следовательно, $XY = XZ = YZ$, что и требовалось доказать.

98. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, образованный средними линиями $\triangle ABC$ (черт. 223). $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$ и коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$. Точка M пересечения медиан $\triangle ABC$ будет также точкой пересечения медиан $\triangle A_1B_1C_1$, так как медианы $\triangle A_1B_1C_1$ являются частями медиан $\triangle ABC$. В силу параллельности сходственных сторон перпендикуляры к серединам сторон $\triangle ABC$ будут высотами в $\triangle A_1B_1C_1$. Таким образом, центр O описанной около $\triangle ABC$ окружности есть ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$. Отсюда вытекает, что $OB_1 = \frac{1}{2}BH$, а $\angle OMB_1 = \angle HMB$, как углы между соответственными линиями в подобных треугольниках. Следовательно, OM и MH составляют одну прямую, что и требовалось доказать. (Это заключение можно было вывести сразу, заметив, что точка M есть центр подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.)



Черт. 223.

99. Пусть O — центр описанной окружности, а H — ортоцентр треугольника ABC (черт. 224). Докажем, что центром искомой окружности будет середина O' отрезка OH, а радиус равен половине радиуса R, описанной около треугольника ABC окружности. Действительно, если B_1 — середина AC, то $OB_1 = \frac{1}{2} BH$ (см. решение задачи 98). Обозначим сере-



Черт. 224.

дину отрезка BH через B_3. Тогда в $\triangle BOH$ прямая $O'B_3$ — средняя линия; следовательно,

$$O'B_3 = \frac{1}{2} OB = \frac{1}{2} R.$$

Далее, $OB_1 = HB_3$ и $OB_1 \parallel HB_3$, так что четырехугольник OB_3HB_1 — параллелограмм; точка O' — середина диагонали OH — центр этого параллелограмма. Поэтому $O'B_1 = O'B_3 = \frac{1}{2} R$. Наконец, четырехугольник OHB_2B_1, где B_2 — основание высоты BHB_2, — трапеция. Проведем $O'K \perp AC$. Так как $O'K$ — средняя линия трапеции, то $B_1K = B_2K$ и, следовательно, $O'B_1 = O'B_2$ (как наклонные с равными проекциями).

Таким образом, мы показали, что

$$O'B_1 = O'B_2 = O'B_3 = \frac{R}{2},$$

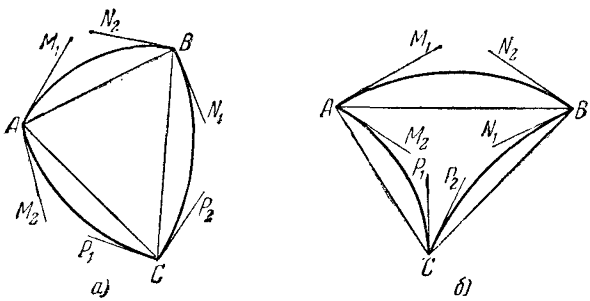
т. е. все три точки B_1, B_2 и B_3 лежат на окружности с центром в O' и радиусом $\frac{R}{2}$. Точно так же доказывается, что и остальные шесть точек лежат на этой окружности.

100. Пусть AM_1, AM_2, BN_1, BN_2, CP_1, CP_2 — касательные к сторонам кругового треугольника ABC в его вершинах A, B и C (черт. 225). Очевидно, имеем

$$\angle M_1AB = \angle N_2BA = \frac{\smile AB}{2}, \quad \angle N_1BC = \angle P_2CB = \frac{\smile BC}{2},$$

$$\angle P_1CA = \angle M_2AC = \frac{\smile AC}{2}.$$

Если все стороны кругового треугольника положительны,



Черт. 225.

т. е. обращены выпуклостью во внешнюю сторону треугольника (черт. 225, *а*), то

$$\angle M_1AM_2 + \angle N_1BN_2 + \angle P_1CP_2 =$$
$$= (\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA) + 2\frac{\smile AB}{2} + 2\frac{\smile BC}{2} + 2\frac{\smile CA}{2} =$$
$$= 180^\circ + \smile AB + \smile BC + \smile CA,$$

откуда

$$(\angle M_1AM_2 + \angle N_1BN_2 + \angle P_1CP_2) -$$
$$- (\smile AB + \smile BC + \smile CA) = 180^\circ.$$

Если же, например, две стороны AC и BC кругового треугольника ABC отрицательны, т. е. обращены выпуклостью внутрь треугольника (черт. 225, *б*), то

$$\angle M_1AM_2 + \angle N_1BN_2 + \angle P_1CP_2 =$$
$$= (\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA) +$$
$$+ 2\frac{\smile AB}{2} - 2\frac{\smile BC}{2} - 2\frac{\smile CA}{2} = 180^\circ + (\smile AB - \smile BC - \smile AC),$$

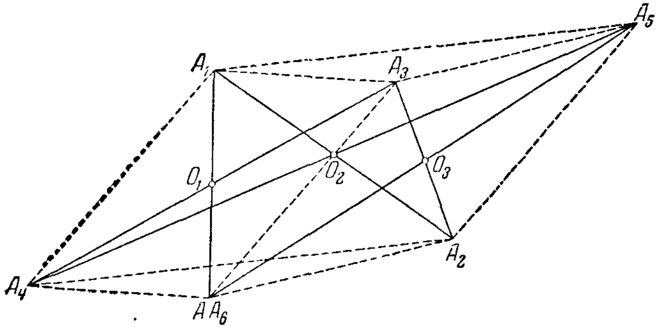
откуда

$$(\angle M_1AM_2+\angle N_1BN_2+\angle P_1CP_2)-\\ -(\smile AB-\smile BC-\smile CA)=180^\circ.$$

Так же проводится доказательство и во всех остальных случаях.

Примечание. Аналогичная теорема имеет место также для круговых многоугольников.

101. Четырехугольник $AA_4A_1A_3$ (черт. 226) — параллелограмм, так как его диагонали в точке пересечения O_1 делятся пополам. Следовательно, A_3A параллельно, равно и направлено в ту же сторону, что и A_1A_4. Четырехугольник

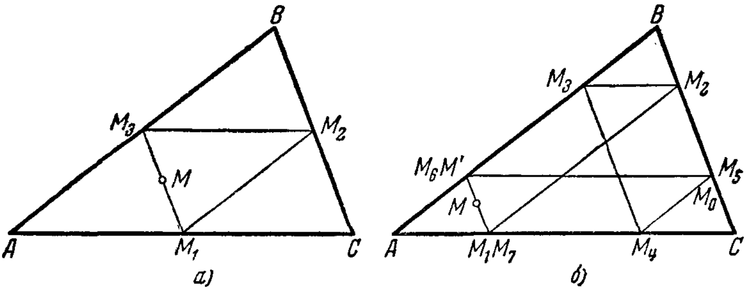


Черт. 226.

$A_4A_1A_5A_2$ — тоже параллелограмм, следовательно, отрезки A_1A_4 и A_5A_2 параллельны, равны и направлены в одну сторону. Наконец, из того, что четырехугольник $A_2A_5A_3A_6$ — параллелограмм, следует, что и отрезки A_5A_2 и A_3A_6 параллельны, равны и направлены в одну сторону. Таким образом, отрезки A_3A и A_3A_6 параллельны, равны и направлены в одну сторону. Но это возможно только в том случае, если точки A и A_6 совпадают.

102. Если точка M лежит на любой из средних линий треугольника ABC, например, на M_3M_1, то, очевидно, через четыре шага она вернется в исходное положение (черт. 227, *а*). *Допустим теперь, что M не лежит ни на одной из трех средних линий треугольника ABC.*

Обозначим через M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 точки на сторонах треугольника ABC, которых последовательно достигает точка M при своем движении (черт. 227, *б*). Докажем, что M_7 совпадает с M_1. Обозначим точку пересечения MM_1 с AB через M'. Нам достаточно показать, что M_6 совпадает с M'. Проведем через точку M' прямую, параллельную AC. Пусть M_0 — точка пересечения этой прямой с BC.



Черт. 227.

Треугольник $M'BM_0$ равен треугольнику M_1M_2C, треугольник M_1M_2C равен треугольнику AM_3M_4 и треугольник AM_3M_4 равен треугольнику BM_5M_6. Следовательно, треугольник $M'BM_0$ равен треугольнику BM_5M_6 и, значит, $M_6M_5 = M'M_0$. Отсюда и следует, что M_6 совпадает с M', а M_5 с M; значит, M_7 совпадает с M_1. Это произойдет через семь шагов.

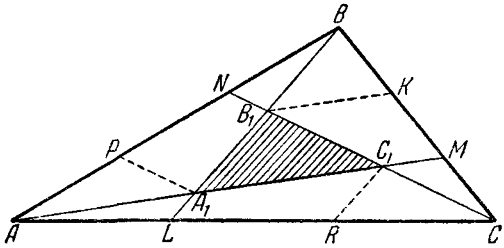
103. Проведем сначала некоторые вспомогательные построения. Отложим на стороне CB данного треугольника ABC отрезок $CM = \frac{1}{3}CB$, а на стороне BA — отрезок $BN = \frac{1}{3}BA$ (черт. 228, *а*) и соединим точки M и N соответственно с A и C. Пусть C_1 — точка пересечения прямых AM и CN. Отложим на прямой CN отрезок $C_1B_1 = CC_1$, соединим B с B_1 и обозначим точки пересечения прямой BB_1 с AM и AC соответственно через A_1 и L. Далее, проведем через точку B_1 прямую, параллельную AM, до пересечения с BC в точке K. Так как $B_1C_1 = C_1C$, то из треугольника B_1KC находим: $KM = MC = \frac{1}{3}BC$. Следовательно, $BK = KM = MC = \frac{1}{3}BC$, а потому из треугольника BMA_1 следует

$$BB_1 = B_1A_1.$$

Проведя теперь $A_1P \| CN$, аналогично предыдущему получим, что $AP = PN = NB = \frac{1}{3} AB$, откуда

$$AA_1 = A_1C_1.$$

Если теперь провести $C_1R \| BL$, то из треугольника AC_1R в силу последнего равенства следует $AL = LR$. Теперь из



Черт. 228.

треугольника CB_1L находим $LR = RC$. Сравнивая последние два равенства, получаем, что

$$AL = LR = RC = \frac{1}{3} AC.$$

Мы построили треугольник $A_1B_1C_1$ такой, что продолжения его сторон A_1C_1, B_1A_1 и C_1B_1 проходят соответственно через вершины A, B и C треугольника ABC, причем

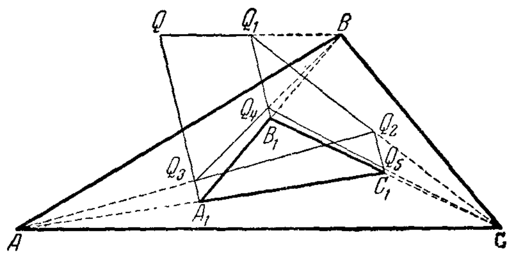
$$AA_1 = A_1C_1, \quad BB_1 = B_1A_1, \quad CC_1 = C_1B_1. \qquad (*)$$

Заметим, что рассуждениями, обратными приведенным выше, легко показать, что, обратно, если продолжения сторон треугольника $A_1B_1C_1$ проходят через вершины треугольника ABC, то из соотношений (*) следует, что

$$\frac{AL}{AC} = \frac{CM}{CB} = \frac{BN}{BA} = \frac{1}{3} \qquad (**)$$

(где L, M и N, как и ранее,— точки пересечения прямых BA_1, AC_1 и CB_1 соответственно с AC, BC и AB), т. е. что построенный выше треугольник $A_1B_1C_1$ — **единственный**, удовлетворяющий условиям (*).

Покажем теперь, что точка Q стремится попасть на этот треугольник. Действительно, пусть расстояние точки Q от A_1 в положении, когда эта точка в первый раз сворачивает к вершине B, равно a. В положении Q_1, в котором эта точка сворачивает к C, она отстоит от B_1 на расстоянии $Q_1B_1 = \frac{a}{2}$, так как Q_1B_1 — средняя линия треугольника QBA_1. В положении Q_2, в котором эта точка сворачивает к A, она отстоит от вершины C_1



Черт. 229.

на расстоянии $\frac{a}{4}$; в положении Q_3 (черт. 229) — от вершины A_1 на расстоянии $\frac{a}{8}$; в положении Q_4, в котором она второй раз поворачивает к B, она будет отстоять от B уже на расстоянии $\frac{1}{16}a$ и т. д. Отсюда и следует наше утверждение.

Вычислим теперь площадь треугольника $A_1B_1C_1$ (см. черт. 228). Так как $CC_1 = C_1B_1$ и $A_1B_1 = B_1B$, то $C_1M = \frac{1}{2}B_1K$. Но $B_1K = \frac{1}{2}MA_1$. Следовательно, $C_1M = \frac{1}{4}MA_1$ или $C_1M = \frac{1}{3}C_1A_1$. Так как $C_1A_1 = A_1A$, то $C_1M = \frac{1}{7}MA$. Но площадь треугольника CAM равна $\frac{1}{3}S$. Следовательно, площадь CC_1M равна $\frac{1}{21}S$ и площадь $ACC_1 = \frac{6}{21}S$. Аналогично

$$\text{пл. } CBB_1 = \frac{6}{21}S \text{ и пл. } BAA_1 = \frac{6}{21}S.$$

Но

$$\text{пл. } ACC_1 + \text{пл. } CBB_1 + \text{пл. } BAA_1 + \text{пл. } A_1B_1C_1 = S.$$

Отсюда

$$\frac{6}{21}S + \frac{6}{21}S + \frac{6}{21}S + \text{пл. } A_1B_1C_1 = S,$$

$$\frac{6}{7}S + \text{пл. } A_1B_1C_1 = S,$$

следовательно,

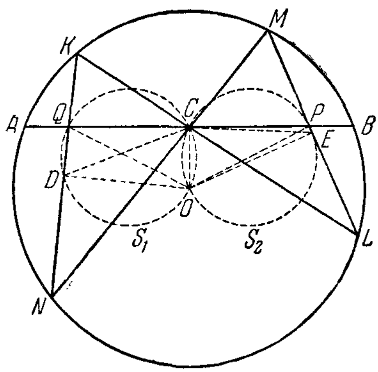
$$\text{пл. } A_1B_1C_1 = \frac{1}{7}S.$$

104. Первое решение. Пусть O — центр данной окружности (черт. 230). Так как $OC \perp QP$, то для доказательства того, что

$$QC = CP,$$

достаточно доказать, что

$$\angle QOC = \angle POC.$$



Черт. 230.

Опустим из центра круга O перпендикуляры OD на KN и OE на ML. Тогда D — середина хорды KN, а E — середина хорды ML. Далее,

$$\angle NKL = \angle NML$$

и

$$\angle KNM = \angle KLM$$

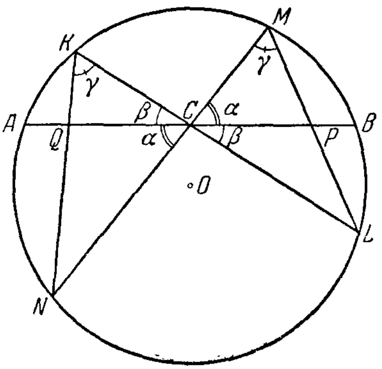
как углы, опирающиеся на одинаковые дуги. Следовательно, $\triangle NKC \backsim \triangle CML$. Отсюда $\frac{KN}{KC} = \frac{ML}{MC}$; следовательно,

$$\frac{KD}{KC} = \frac{ME}{MC}.$$

Таким образом, в треугольниках KDC и MEC две стороны пропорциональны; так как углы, заключающие эти стороны, равны, то эти треугольники подобны. Отсюда следует, что

$$\angle KDC = \angle MEC.$$

Рассмотрим теперь четырехугольники $QDOC$ и $COEP$. Они имеют по два противоположных прямых угла; поэтому около них можно описать окружности S_1 и S_2. Следовательно, $\angle QDC = \angle QOC$ как углы, опирающиеся на одну дугу окружности S_1, и



Черт. 231.

$$\angle PEC = \angle POC$$

как углы, опирающиеся на одну дугу окружности S_2. Но $\angle QDC = \angle PEC$, а потому и $\angle QOC = \angle POC$ и, следовательно, $QC = PC$.

Второе решение. Обозначим (черт. 231)

$$\angle PCM = \angle QCN = \alpha,$$
$$\angle LCP = \angle QCK = \beta,$$
$$\angle NML = \angle LKN = \gamma$$

и найдем выражение для $QC = x$ через $AC = a$ и углы α, β, γ. По теореме о произведении отрезков хорд имеем:

$$NQ \cdot QK = AQ \cdot QB = (a - x)(a + x) = a^2 - x^2.$$

По теореме синусов имеем из треугольника NQC

$$NQ = \frac{x \sin \alpha}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)]} = \frac{x \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}$$

и из треугольника QKC

$$QK = \frac{x \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Следовательно,

$$NQ \cdot QK = \frac{x^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma \cdot \sin (\alpha + \beta + \gamma)} = a^2 - x^2.$$

Отсюда мы можем определить длину отрезка x:

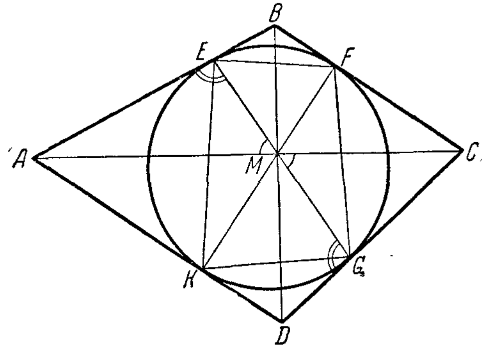
$$x^2 = \frac{a^2 \sin \gamma \cdot \sin (\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin \gamma \cdot \sin (\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Производя аналогичные вычисления для отрезка $PC = y$, мы получим

$$y^2 = \frac{a^2 \sin\gamma \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin\gamma \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Из последних двух равенств следует, что $x = y$, т. е. $QC = CP$.

105. Пусть $ABCD$ (черт. 232) — описанный около окружности четырехугольник, E, F, G, K — точки касания сторон этого четырехугольника с окружностью и M — точка



Черт. 232.

пересечения AC и EG. Рассмотрим треугольники AEM и CGM. У этих треугольников есть пара равных углов: $\angle AME = \angle CMG$. Кроме того,

$$\angle AEM + \angle CGM = 180°,$$

так как $\angle AEM = \angle DGM$ (касательные EA и GD к окружности составляют равные углы с хордой EG, соединяющей точки касания). В силу известной формулы для площади треугольника имеем

$$S_{\triangle AEM} = \frac{1}{2} AM \cdot EM \cdot \sin AME = \frac{1}{2} AE \cdot EM \cdot \sin AEM$$

и

$$S_{\triangle CGM} = \frac{1}{2} CM \cdot GM \sin CMG = \frac{1}{2} CG \cdot GM \sin CGM.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{\triangle AEM}}{S_{\triangle CGM}}=\frac{\frac{1}{2}AM\cdot EM\cdot\sin AME}{\frac{1}{2}CM\cdot GM\sin CMG}=\frac{AE\cdot EM\cdot\sin AEM}{CG\cdot GM\sin CGM}.$$

Отсюда, так как $\sin AME=\sin CMG$ и $\sin AEM=\sin CGM$,

$$\frac{AM}{CM}=\frac{AE}{CG}.$$

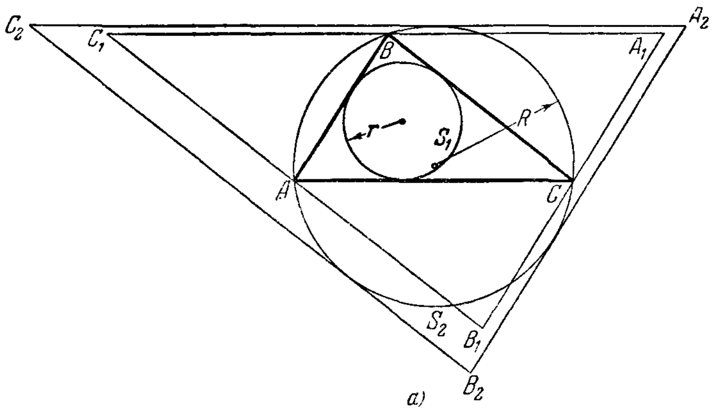
Мы видим, что прямая EG делит диагональ AC четырехугольника в отношении $\frac{AE}{CG}$. Точно так же убеждаемся, что прямая FK делит ту же диагональ в отношении $\frac{AK}{CF}$. Но $\frac{AE}{CG}=\frac{AK}{CF}$, так как $AE=AK$, $CG=CF$. Следовательно, прямые EG и FK делят диагональ AC в одном и том же отношении, т. е. пересекают ее в одной точке: AC проходит через точку пересечения прямых EG и FK.

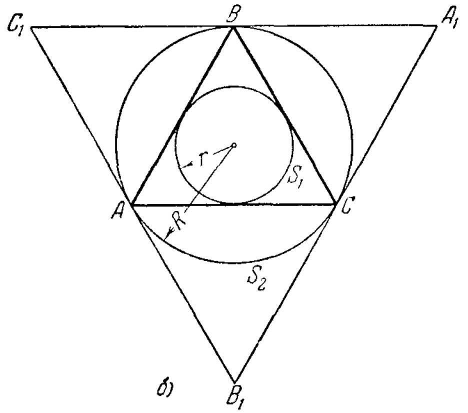
Точно так же доказывается, что BD проходит через точку пересечения EG и FK.

106. а) Пусть S_1 и S_2 — соответственно вписанная и описанная окружности треугольника ABC (черт. 233, *а*). Проведем через каждую вершину $\triangle ABC$ прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC и имеющий вдвое бóльшие стороны. Каждая сторона $\triangle A_1B_1C_1$ заведомо имеет по одной общей точке с окружностью S_2 (именно, точки A, B и C). Проведем касательные к окружности S_2, параллельные сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Эти касательные определяют новый треугольник $A_2B_2C_2$, подобный треугольнику $A_1B_1C_1$ и, следовательно, треугольнику ABC. Стороны треугольника $A_2B_2C_2$ не меньше соответствующих сторон треугольника $A_1B_1C_1$ (второй из этих треугольников целиком заключен внутри первого). Так как окружности S_1 и S_2 вписаны в подобные треугольники ABC и $A_2B_2C_2$, то из того, что $A_2B_2\geqslant A_1B_1=2AB$, следует

$$R\geqslant 2r,$$

что и требовалось доказать. Очевидно, равенство достигается только в том случае, если все стороны треугольника





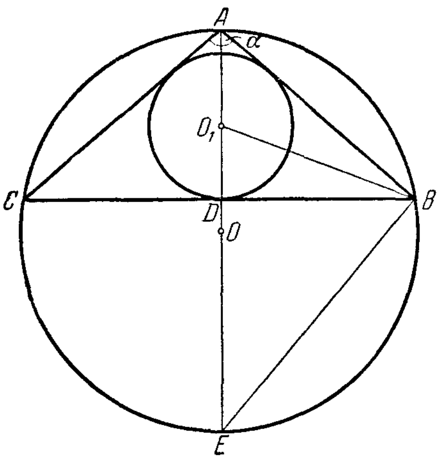
Черт. 233.

$A_1B_1C_1$ касаются окружности S_2 (треугольник $A_2B_2C_2$ совпадает с треугольником $A_1B_1C_1$; см. черт. 233, *б*). $\angle A = \angle A_1$, поэтому в этом случае

$$\smile BC = \smile BAC - \smile BC = 360^\circ - 2 \smile BC;$$

следовательно,
$$3 \smile BC = 360°,$$
откуда
$$\angle A = 60°;$$
точно так же доказываем, что
$$\angle B = \angle C = 60°.$$
Таким образом, в этом случае треугольник ABC правильный.

б) Пусть в окружность радиуса R с центром O вписан равнобедренный треугольник ABC с углом α при вершине (черт. 234). Вычислим радиус r окружности с центром O_1, вписанной в треугольник ABC. Пусть AD — высота треугольника ABC. Так как точка O_1 лежит на биссектрисе угла ABC, то из $\triangle ABD$ по известному свойству биссектрисы получаем



Черт. 234.

$$\frac{DO_1}{O_1A} = \frac{DB}{AB},$$
откуда
$$\frac{DO_1 + O_1A}{DO_1} = \frac{DB + AB}{DB}$$
и, следовательно,
$$r = O_1D = \frac{AD \cdot DB}{DB + AB}. \quad (*)$$

Продолжив AD до пересечения с описанной окружностью в точке E, из прямоугольного треугольника ABE найдем
$$AB = 2R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$
Далее, из треугольника ADB имеем
$$AD = AB \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2R\cos^2\frac{\alpha}{2},$$
$$DB = AB \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Подставляя полученные выражения в равенство (*), получим

$$r=\frac{2R\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+2R\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2R\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+1}=$$

$$=\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Пусть теперь дано произвольное значение r такое, что $2r\leqslant R$. Будем искать такой угол α, чтобы радиус круга, вписанного в равнобедренный треугольник с углом α при вершине, равнялся данной величине r. Имеем

$$r=2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

откуда

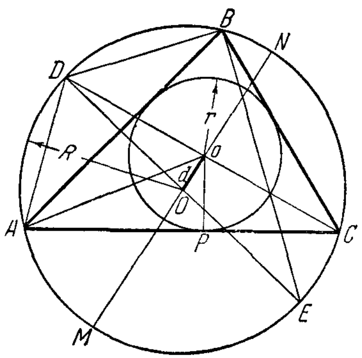
$$2R\sin^2\frac{\alpha}{2}-2R\sin\frac{\alpha}{2}+r=0,$$

т. е.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R\pm\sqrt{R^2-2Rr}}{2R}.$$

Так как $2r\leqslant R$, то подкоренное выражение $R^2-2Rr\geqslant 0$; при этом $0<\frac{R\pm\sqrt{R^2-2Rr}}{2R}<1$. Следовательно, искомый угол α существует $\left(\text{их даже два при } r\neq\frac{R}{2}\right)$. Таким образом, для любых двух отрезков R и r, связанных соотношением $2r\leqslant R$, существует треугольник, для которого радиусы описанного и вписанного кругов равны соответственно R и r, что и требовалось доказать.

107. Пусть O и o суть центры рассматриваемых окружностей радиусов R и r, $Oo=d$, ABC — треугольник, вписанный в первую окружность и описанный около второй окружности (черт. 235). Продолжим Oo до пересечения с описанной около треугольника ABC окружностью в точках M и N. Тогда $OM = R + d$, $ON = R - d$. Пусть, далее, D — вторая точка пересечения прямой Co с описанной окружностью; в таком случае имеем



Черт. 235.

$$oC \cdot oD = oM \cdot oN = \\ = (R + d)(R - d) = \\ = R^2 - d^2.$$

Найдем теперь другое выражение для $oC \cdot oD$. Проведем диаметр DE описанной окружности и отрезки DA, DB и oA. Так как CD есть биссектриса угла C треугольника ABC, то

$$DA = DB.$$

Далее, треугольник AoD равнобедренный; действительно, так как $\angle DAB = \angle DCB = \frac{1}{2} \angle C$ и $\angle oAB = \frac{1}{2} \angle A$, то

$$\angle oAD = \angle oAB + \angle BAD = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2};$$

с другой стороны

$$\angle AoD = \angle oAC + \angle oCA = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2}$$

(как внешний угол треугольника AoC). Следовательно, $AD = oD$, а значит, и $BD = oD$.

Опустим теперь из точки o перпендикуляр oP на сторону AC треугольника ABC. В прямоугольных треугольниках CoP и EBD $\angle DEB = \angle DCB = \angle oCP$; следовательно, эти треугольники подобны и $\frac{Co}{oP} = \frac{DE}{DB}$, $oC \cdot DB = oP \cdot DE = r \cdot 2R$. Отсюда следует

$$oC \cdot oD = 2Rr.$$

Сравнивая это соотношение с полученным ранее, имеем

$$R^2 - d^2 = 2Rr,$$

или

$$d^2 = R^2 - 2Rr \qquad (*)$$

или еще

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}.$$

Пусть, обратно, радиусы R и r данных окружностей и расстояние между их центрами связаны соотношением (*). Тогда $R^2 - 2Rr \geqslant 0$, откуда $R \geqslant 2r$. Следовательно, существует треугольник ABC, описанная и вписанная окружности которого имеют радиусы R и r (см. задачу 106 б)). Но тогда расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника ABC должно по доказанному равняться $\sqrt{R^2 - 2Rr} = d$, откуда и следует, что существует треугольник (равный $\triangle ABC$), вписанный в одну из данных окружностей и описанный около другой из них.

Если между радиусами двух окружностей и расстоянием между их центрами не имеет места соотношение $d^2 = R^2 - 2Rr$, то не существует треугольника, вписанного в одну окружность и описанного около другой окружности. Если же это соотношение имеет место, то существует бесконечно много таких треугольников: если из *произвольной* точки C большей окружности провести хорды AC и CB этой окружности, касающиеся меньшей окружности, то можно доказать, что хорда AB тоже коснется этой окружности и треугольник ABC будет вписан в одну окружность и описан около второй.

108. Пусть O и o — центры двух рассматриваемых окружностей радиусов R и r, $Oo = d$, $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в первую окружность и описанный около второй окружности, E, F, G, H — точки касания сторон этого четырехугольника с меньшей окружностью, T — точка пересечения прямых EG и FH (черт. 236, a). Рассмотрим четырехугольники $TEBF$ и $TGDH$. Мы имеем следующие соотношения между углами этих четырехугольников:

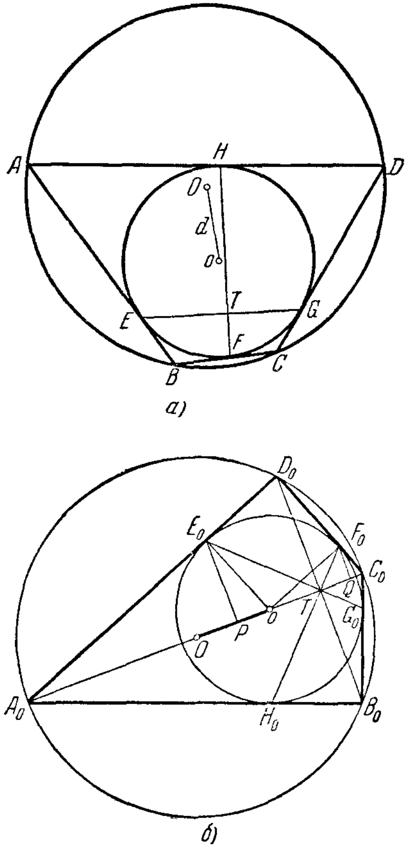
1° $\angle EBF + \angle GDH = 180°$, как противоположные углы вписанного в окружность четырехугольника;

2° $\angle TEB + \angle TGD = 180°$ (так как углы TEB и TGC, образованные касательными к окружности в двух точках E и G с хордой, соединяющей точки касания, равны между собой);

3° $\angle TFB + \angle THD = 180°$ (по аналогичной причине).

Так как сумма всех углов обоих четырехугольников равна 720°, то

$$\angle ETF + \angle GTH = 180°, \text{ т. е. } EG \perp FH.$$



Черт. 236.

В силу результата задачи 86 геометрическое место точек пересечения касательных к меньшей окружности, проведенных через точки пересечения этой окружности с произвольными взаимно перпендикулярными прямыми, проходящими через точку T, представляет собой окружность, проходящую, очевидно, через точки A, B, C и D и, следовательно, совпадающую с большей из наших окружностей. Этот результат означает, что существует бесчисленное множество четырехугольников, вписанных в бóльшую из наших окружностей и описанных вокруг меньшей окружности. Действительно, проведем через ту же точку T произвольные хорды меньшей окружности, перпендикулярные между собой; касательные к меньшей окружности, проведенные в точках пересечения ее с этими хордами, образуют четырехугольник, обладающий желаемым свойством.

Теперь для того, чтобы получить интересующее нас соотношение между R, r и d, рассмотрим четырехугольник специального вида, вписанный в одну из рассматриваемых окружностей и описанный около другой окружности. Проведем через точку T взаимно перпендикулярные хорды E_0G_0 и F_0H_0 меньшей окружности, образующие с прямой TO углы $45°$ (черт. 236, *б*). Пусть $A_0B_0C_0D_0$ есть четырехугольник, образованный касательными к меньшей окружности в точках E_0, F_0, G_0 и H_0. Прямая oT будет осью симметрии этого четырехугольника; следовательно, $B_0C_0 = D_0C_0$; $B_0A_0 = D_0A_0$ и прямая B_0D_0, проходящая в силу задачи 105 через точку T, перпендикулярна к прямой A_0C_0. В силу симметрии чертежа относительно прямой A_0C_0 эта прямая является диаметром большей окружности, откуда, в частности, следует, что точка T лежит на линии центров Oo рассматриваемых двух окружностей и $\angle C_0B_0A_0 = \angle C_0D_0A_0 = 90°$.

Проведем теперь радиусы oF_0 и oE_0 вписанной в четырехугольник $A_0B_0C_0D_0$ окружности и опустим из точек E_0 и F_0 перпендикуляры E_0P и F_0Q на диагональ A_0C_0, являющуюся осью симметрии всей фигуры. Так как треугольник $A_0D_0C_0$ прямоугольный, то $oE_0 \perp oF_0$, и прямоугольные треугольники oE_0P и oF_0Q имеют равные острые углы (углы со взаимно перпендикулярными сторонами); так как, кроме того, $oE_0 = oF_0 = r$, то эти треугольники равны. Следовательно, $oQ = E_0P$ и $oQ^2 + oP^2 = E_0P^2 + Po^2 = r^2$. Но

$$oA_0 = OA_0 + Oo = R + d, \quad oC_0 = OC_0 - Oo = R - d$$

и согласно известному свойству прямоугольного треугольника

$$oP = \frac{oE_0^2}{oA_0} = \frac{r^2}{R+d}, \quad oQ = \frac{oF_0^2}{oC_0} = \frac{r^2}{R-d}.$$

Таким образом, окончательно мы получаем

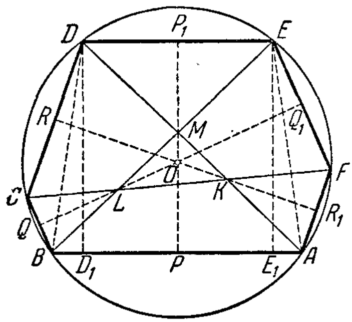
$$\frac{r^4}{(R+d)^2} + \frac{r^4}{(R-d)^2} = r^2,$$

или

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}. \qquad (*)$$

Если R, r и d не связаны соотношением (*), то не существует ни одного четырехугольника, вписанного в одну из наших двух окружностей и описанного около второй окружности; если это соотношение имеет место, то, как мы видели, таких четырехугольников имеется бесчисленное множество.

109. Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, удовлетворяющий условиям задачи (черт. 237). Четырехугольник $ABDE$ представляет собой трапецию, диагонали AD и BE которой равны между собой. Отсюда следует, что она равнобочная. (Действительно, опустив из точек D и E перпендикуляры DD_1 и EE_1 на AB, получим, что треугольники ADD_1 и BEE_1 равны между собой, следовательно, $AD_1 = BE_1$, т. е. $AE_1 = BD_1$; отсюда вытекает, что треугольники AEE_1 и BDD_1 равны, а следовательно, $AE = BD$.)



Черт. 237.

Прямая PP_1, соединяющая середины сторон AB и ED шестиугольника, является осью симметрии этой трапеции. Следовательно, эта прямая перпендикулярна к AB и ED, проходит через точку M пересечения диагоналей AD и BE и делит угол между ними пополам.

Точно так же доказывается, что прямая QQ_1, соединяющая середины сторон BC и EF шестиугольника, перпендикулярна к этим сторонам и является биссектрисой угла между диагоналями BE и CF шестиугольника и что прямая RR_1, соединяющая середины сторон CD и FA, перпендикулярна к этим сторонам и является биссектрисой угла, образованного диагоналями DA и CF. Таким образом, три прямые PP_1, QQ_1 и RR_1 являются биссектрисами треугольника MKL, образованного в пересечении прямых AD, BE и CF, и как три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Из того, что перпендикуляры, восставленные ко всем сторонам шестиугольника $ABCDEF$ в их серединах, пересекаются в одной точке, следует, что вокруг этого шестиугольника можно описать окружность.

110. Пусть $ABCDEF$ (черт. 238) есть рассматриваемый шестиугольник. Заметим, что

$$S_{\triangle DOB} = S_{\triangle ODE} = S_{\triangle OAB},$$

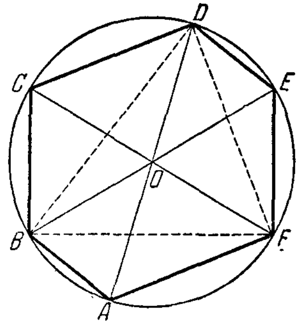
так как каждые два соседние из этих треугольников имеют равные основания и высоты. Аналогично,

$$S_{\triangle DOF} = S_{\triangle OCD} = S_{\triangle OFA},$$
$$S_{\triangle BOF} = S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OEF}.$$

Отсюда

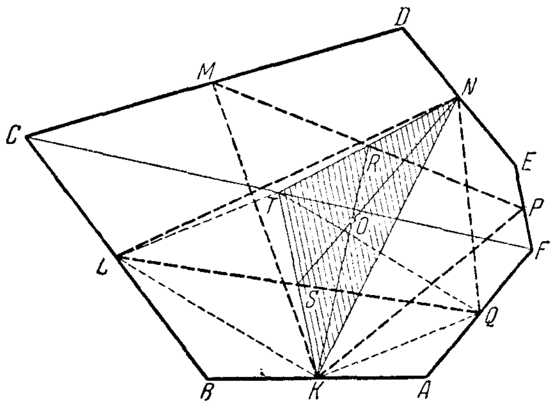
$$2S_{\triangle BDF} = 2(S_{\triangle OBD} + S_{\triangle ODF} + S_{\triangle OFB}) = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle ODE} + S_{\triangle OEF} + S_{\triangle OFA} = S_{ABCDEF},$$

что и требовалось доказать.



Черт. 238.

111. Обозначим середины сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ последовательно через K, L, M, N, P, Q (черт. 239). Проведем медиану KR треугольника KMP и медиану NS треугольника NQL и докажем, что в точке пере-



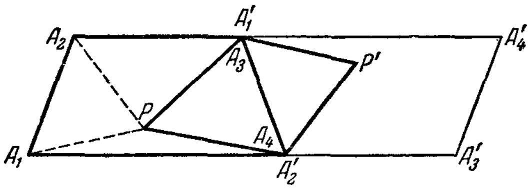
Черт. 239.

сечения O эти два отрезка делятся в отношении $KO:OR = NO:OS = 2:1$; отсюда и будет следовать, что точки пересечения медиан треугольников KMP и NQL совпадают.

Проведем диагональ CF шестиугольника $ABCDEF$ и соединим точки K и N с серединой T этой диагонали. Так как T есть середина стороны CF четырехугольника $CFAB$, Q — середина стороны FA, K — середина стороны AB и L — середина стороны BC, то четырехугольник $KLTQ$ является параллелограммом (оба отрезка KL и QT параллельны диагонали AC четырехугольника $ABCF$ и равны ее половине, т. е. параллельны и равны между собой). Следовательно, середина S его диагонали LQ будет серединой и другой диагонали — KT. Точно так же показывается, что середина R отрезка MP является и серединой отрезка NT. Но отсюда следует, что отрезки KR и NS являются медианами треугольника KNT; следовательно, $KO:OR = NO:OS = 2:1$.

Примечание. Задача сохраняет силу и в том случае, когда шестиугольник $ABCDEF$ не является выпуклым, если только ни один из треугольников KMP и NQL не вырождается в отрезок (в последнем случае вообще нельзя говорить о точке пересечения медиан этого «треугольника»).

112. а) Первое решение. Приложим к трапеции $A_1A_2A_3A_4$ трапецию $A_1'A_2'A_3'A_4'$, равную первоначальной так,

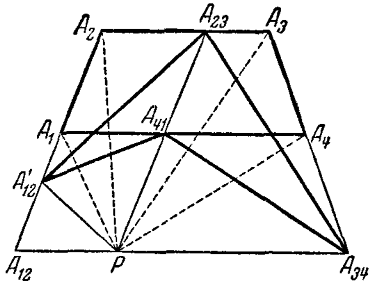


Черт. 240.

чтобы ее боковая сторона $A_2'A_1'$ совпала с A_3A_4 (черт. 240). Пусть P' — точка, которая расположена по отношению к трапеции $A_1'A_2'A_3'A_4'$ так же, как точка P по отношению к трапеции $A_1A_2A_3A_4$. В таком случае $P'A_4 = P'A_2' = PA_2$, $P'A_3 = P'A_1' = PA_1$ и $PA_3P'A_4$ есть искомый четырехугольник.

Второе решение. Проведем через точку P (черт. 241) прямые $A_{23}A_{41} \parallel A_2A_1$, $A_{12}A_{34} \parallel A_1A_4$, и из точки P, как центра, сделаем засечку на прямой A_1A_2 радиусом PA_{12}; полученную точку обозначим через A_{12}' (черт. 241; если трапеция — прямоугольник, то A_{12}' совпадает с A_{12}).

Очевидно, $A_2A_{23}PA'_{12}$ — равнобедренная трапеция. В самом деле $A_2A'_{12} \parallel A_{23}P$, $A_2A_{23} = A_{12}P = A'_{12}P$; в то же время этот четырехугольник не параллелограмм. (Исключением будет лишь тот случай, когда исходная трапеция — прямоугольник; тогда $A'_{12}A_2A_{23}, P$ — также прямоугольник.) Отсюда следует, что



Черт. 241.

$A_{23}A'_{12} = PA_2$. Точно так же и $A_1A'_{12}PA_{41}$ — равнобедренная трапеция, откуда следует, что $A_{41}A'_{12} = PA_1$. Легко видеть, что кроме того

$$PA_3 = A_{23}A_{34} \text{ и } PA_4 = A_{34}A_{41}$$

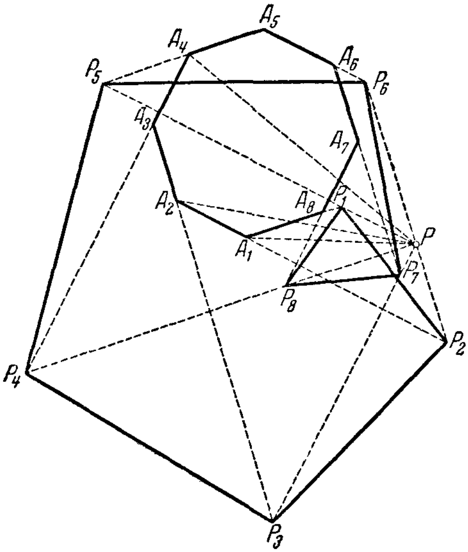
(это вытекает из рассмотрения соответствующих равнобочных трапеций). Поэтому фигура $A'_{12}\ A_{23}A_{34}A_{41}$ и есть искомый четырехугольник.

Примечание. Утверждение настоящей задачи справедливо не только для равнобедренной трапеции, но и для всякого четырехугольника, имеющего пару равных противоположных сторон (см. первое решение задачи).

б) Из точки P проведем прямую параллельно A_1A_2 до пересечения с прямой A_nA_1 в точке P_1, затем прямую, параллельную стороне A_2A_3, до пересечения с прямой A_1A_2 в точке P_2, затем прямую, параллельную A_3A_4, до пересечения с A_2A_3 в точке P_3 и т. д. (черт. 242).

1° Рассмотрим четырехугольник $PP_1A_1P_2$. Это трапеция и притом равнобедренная. В самом деле, $PP_1 \parallel P_2A_1$ по построению; $\angle P_1A_1A_2 = \angle A_1A_2A_3$. Отсюда следует, что $\angle P_1A_1P_2 = 2d - \angle P_1A_1A_2 = 2d - \angle A_1A_2A_3 = \angle PP_2A_1$, ибо $PP_2 \parallel A_3A_2$. Из равенства углов при основании трапеции следует равенство диагоналей $PA_1 = P_1P_2$.

2° Рассмотрим теперь четырехугольник $PP_2P_3A_2$. Это трапеция, так как $PP_2 \parallel A_2P_3$. Далее, $\angle PP_3A_2 = 2d - \angle A_2A_3A_4$, $\angle P_2A_2P_3 = 2d - \angle A_3A_2A_1$, значит, $\angle PP_3A_2 = \angle P_2A_2P_3$. Но тогда $\triangle A_2P_2P_3 = \triangle A_2PP_3$, ибо сторона A_2P_3 у них общая, высоты на эту сторону равны и $\angle PP_3A_2 = \angle P_2A_2P_3$. Отсюда $PA_2 = P_2P_3$.

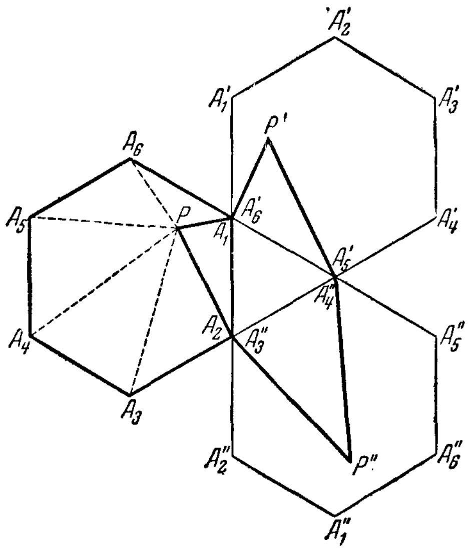


Черт. 242.

Точно так же рассмотрим, далее, произвольный четырехугольник $PP_iP_{i+1}A_i$ ($i = 3, 4, \ldots, n$; под P_{n+1} мы понимаем P_1). В силу того, что $PP_i \parallel A_iP_{i+1}$, $PP_iA_{i+1}A_i$ — трапеция, $\angle P_{i+1}A_iP_i = \angle A_iP_{i+1}P$. Если отрезки PP_{i+1} и P_iA_i не пересекаются, то, как мы показали в п. 1°, $PP_iA_iP_{i+1}$ — равнобедренная трапеция и $PA_i = P_iP_{i+1}$ как ее диагонали. Если же отрезки PP_{i+1} и P_iA_i пересекаются, то согласно п. 2° $PP_iP_{i+1}A_i$ — также равнобедренная трапеция и $PA_i = P_iP_{i+1}$ как ее стороны. Итак, в обоих случаях получаем $PA_i = P_iP_{i+1}$, т. е. все наши отрезки P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$, P_nP_1 равны соответствующим отрезкам PA_1, PA_2, $\ldots$, PA_n. Таким образом, мы получаем, что многоугольник $P_1P_2 \ldots P_n$ — искомый.

Примечание I. Отметим, что в доказательстве этой теоремы совершенно не использовалось равенство сторон многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Следовательно, теорема настоящей задачи остается верной и в том случае, когда $A_1A_2\ldots A_n$ есть произвольный многоугольник с равными углами.

Примечание II. Решение задачи 112 б) аналогично второму решению задачи 112 а). Приведем здесь еще изящное решение задачи 112 б) для случая правильного шестиугольника, аналогичное первому решению задачи 112 а).



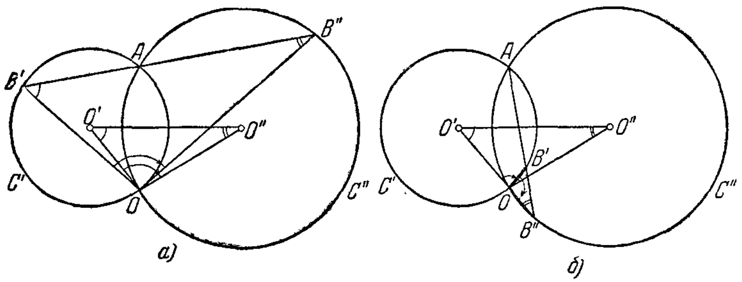
Черт. 243.

Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ есть правильный шестиугольник, P — точка. Приложим к шестиугольнику $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ два равных ему шестиугольника $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'$ и $A_1''A_2''A_3''A_4''A_5''A_6''$, расположенные так, как показано на черт. 243. Пусть, далее, P' и P'' — точки, расположенные по отношению к шестиугольнику $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'$, соответственно $A_1''A_2''A_3''A_4''A_5''A_6''$ так же, как точка P по отношению к исходному шестиугольнику $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. В таком случае

$$P''A_3''=PA_3,\quad P''A_4''=PA_4,$$
$$P'A_5'=PA_5,\quad P'A_6'=PA_6$$

и $A_1PA_2P''A_4''P'A_6'$ есть искомый шестиугольник.

113. Докажем предварительно следующее довольно известное предложение: если две окружности C' и C'' с центрами O' и O'' пересекаются в точках A и O (черт. 244) и через точку A проведена секущая, пересекающая окружности C' и C'' соответственно в точках B' и B'', то $\angle B'OB'' = \angle O'OO''$ (т. е. угол, под которым виден отрезок секущей из точки O, является постоянной величиной для любой секущей, проведенной через точку A).

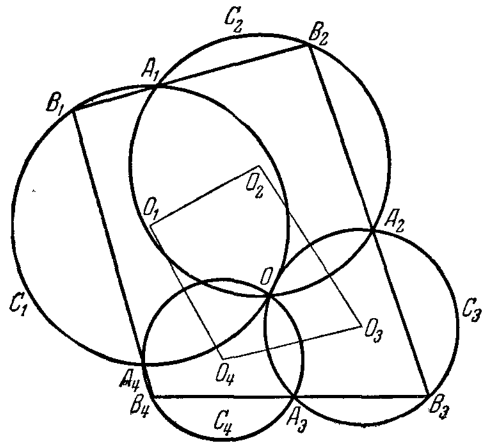


Черт. 244.

При доказательстве этого факта могут представиться два случая: 1) точки B' и B'' расположены по разные стороны OA (черт. 244, *а*); 2) точки B' и B'' расположены по одну сторону OA (черт. 244, *б*). Рассмотрим сначала первый случай. Угол $B''B'O$ измеряется половиной дуги AO окружности C', а угол $B'B''O$ — половиной дуги AO окружности C''. Отсюда сразу следует, что $\angle B''B'O = \angle OO'O''$ и $B'B''O = \angle OO''O'$, откуда $\angle O'OO'' = \angle B'OB''$, что и требовалось доказать. Во втором случае (черт. 244, *б*) угол $B'B''O$ попрежнему измеряется половиной дуги AO окружности C'', а угол $B''B'O$ — полусуммой дуг OB' и $B'A$ окружности C', т. е. попрежнему половиной дуги AO этой окружности. Дальнейшая часть доказательства остается без изменений.

Заметим еще, что в обоих случаях углы $B'OB''$ и $O'OO''$ откладываются в одну и ту же сторону (см. черт. 244, *а* и *б*); таким образом, если условимся считать углы, откладываемые против часовой стрелки, положительными, а по часовой стрелке — отрицательными, то равенство не нарушится.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Рассмотрим многоугольник $O_1O_2\ldots O_n$ (O_1 — центр окружности C_1 и т. д.; черт. 245). Так как он замкнут, то сумма углов $\angle O_1OO_2 + \angle O_2OO_3 + \ldots + \angle O_nOO_1$ равна, очевидно, целому кратному $360°$. Из доказанной леммы немедленно вытекает,



Черт. 245.

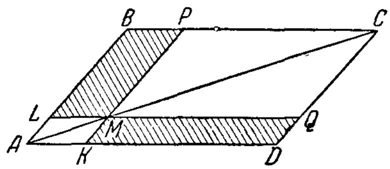
что равная ей сумма углов $\angle B_1OB_2 + \angle B_2OB_3 + \ldots + \angle B_nOB_{n+1}$ тоже равна целому кратному $360°$, что означает, что точки B_1 и B_{n+1} лежат на одном луче, проведенном из O. Так как прямая может пересекать окружность самое большее в двух точках, то B_{n+1} совпадает или с B_1, или с O.

Но легко видеть, что B_{n+1} не может совпасть с O. Действительно, пусть B_k — первая из точек $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$, совпадающая с O; в силу условия задачи $k > 1$. Очевидно, что B_{k-1} должно совпадать либо с A_{k-1}, либо тоже с O. Но первое противоречит условию задачи, а второе сделанному нами предложению, что B_k первая из точек B, совпадающая с O. Поэтому B_{n+1} обязано совпадать с B_1, что и требовалось доказать.

Примечание I. Утверждение задачи остается в силе, если считать, что B_k может совпасть с A_k, и в этом случае брать вместо секущей B_kA_k касательную к окружности C_k в точке A_k. Точно так же и в том случае, когда B_1 совпадает с O, теорему можно считать справедливой; в этом случае все точки B_2, B_3, ..., B_{n+1} совпадают с O.

Примечание II. Можно было бы провести доказательство и по-другому. Для этого надо было бы доказать утверждение для случая трех окружностей, а затем вести доказательство по индукции, соединяя с B_1 точку B_{n-1} и рассматривая отдельно треугольник $B_1B_{n-1}B_n$. Недостатком этого доказательства является необходимость рассмотрения всевозможных расположений трех окружностей, поэтому мы его не приводим. Заинтересовавшийся читатель легко проведет его сам.

114. Доказательство этой теоремы очень легко получить, основываясь на следующем совершенно элементарном предложении: если через точку M, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ (черт. 246) провести две прямые KP



Черт. 246.

и LQ, параллельные сторонам параллелограмма, то площади параллелограммов, прилегающих к вершинам D и B, будут равны. Действительно,

$$S_{KMQD} = S_{ACD} - S_{MCQ} - S_{AMK},$$
$$S_{PMLB} = S_{ACB} - S_{MCP} - S_{AML},$$

откуда и следует, что

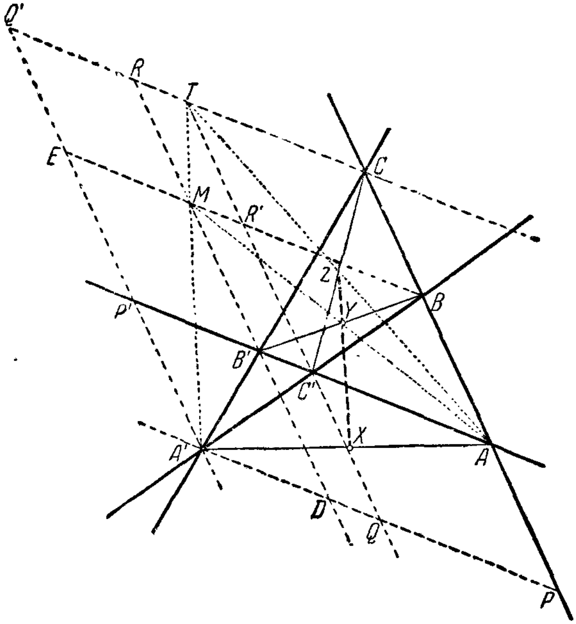
$$S_{KMQD} = S_{PMLB}.$$

Обратно, если точка M расположена внутри параллелограмма $ABCD$ и обладает упомянутым свойством, то она обязательно лежит на диагонали AC параллелограмма, так как из равенства площадей S_{KMQD} и S_{PMLB} следует, что

$$S_{AMCD} = S_{AMCB}.$$

Обозначим теперь стороны полного четырехсторонника через ABC, $AC'B'$, $BC'A'$ и $A'B'C$; в таком случае диагоналями четырехсторонника будут отрезки AA', BB' и CC'

(черт. 247). Середины этих диагоналей обозначим соответственно через X, Y и Z. Проведем через все вершины четырехсторонника прямые, параллельные его сторонам ABC и $AC'B'$; точки пересечения этих прямых обозначим так, как



Черт. 247.

это указано на черт. 247. В силу доказанного предложения о площадях параллелограммов мы будем иметь

$$S_{AP'A'P} = S_{A'DRQ'}, \qquad S_{AP'A'P} = S_{A'ER'Q},$$

и следовательно,

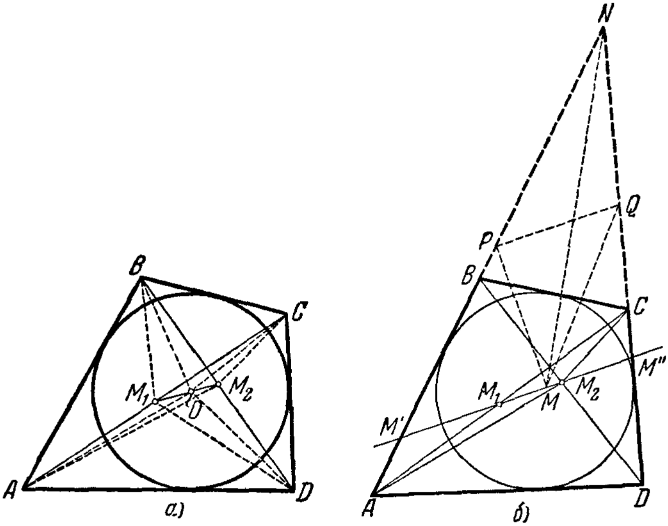
$$S_{A'DRQ'} = S_{A'ER'Q}.$$

Отсюда

$$S_{EMRQ'} = S_{DQR'M},$$

а это соотношение показывает, что точка M лежит на диагонали $A'T$ параллелограмма $A'QTQ'$, т. е. что точки A', M и T лежат на одной прямой. Отсюда следует, что середины отрезков AA', AM и AT лежат на одной прямой. Так как BB' и AM — диагонали параллелограмма $ABMB'$, то середина отрезка AM совпадает с серединой Y диагонали BB' четырехсторонника; аналогично, середина отрезка AT совпадает с точкой Z. Следовательно, середины X, Y и Z диагоналей AA', BB' и CC' полного четырехсторонника лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

115. Случай, когда обе пары противоположных сторон четырехугольника параллельны (когда четырехугольник является ромбом), тривиален; поэтому рассмотрим только случай,



Черт. 248.

когда в четырехугольнике есть хотя бы одна пара непараллельных противоположных сторон (например, стороны AB и CD; черт. 248, a).

Пусть M_1 и M_2 — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ и O — центр вписанной окружности. Заметим, что

$$S_{\triangle M_1AB} + S_{\triangle M_1CD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{2} S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}, \qquad (*)$$

и аналогично

$$S_{\triangle M_2AB}+S_{\triangle M_2CD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}. \qquad (**)$$

Кроме того,

$$S_{\triangle AOB}+S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}. \qquad (***)$$

В самом деле, обозначив радиус вписанного круга через R, будем иметь

$$S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}R\cdot AB+\frac{1}{2}R\cdot CD=\frac{R}{2}(AB+CD);$$

$$S_{\triangle OAD}+S_{\triangle OBC}=\frac{R}{2}(AD+BC).$$

Но так как $AB+CD=AD+BC$ (ибо четырехугольник описан вокруг окружности), то

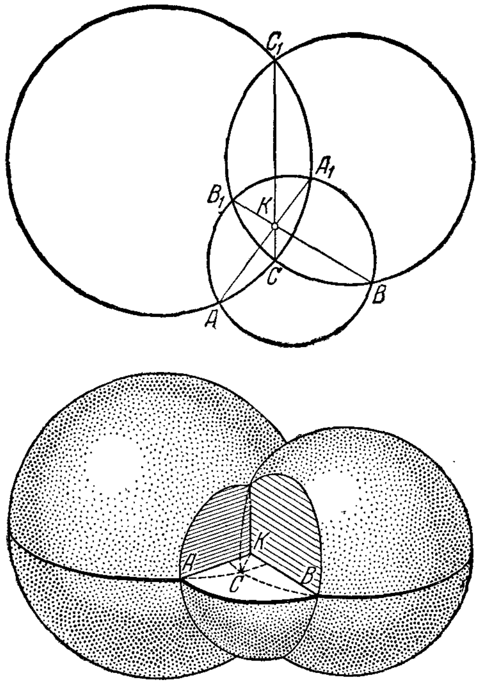
$$S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OCD}=S_{\triangle OAD}+S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что геометрическое место точек M, расположенных внутри четырехугольника $ABCD$ и таких, что сумма площадей треугольников MAB и MCD постоянна, есть отрезок. Тем самым наша теорема будет доказана, ибо в силу равенств (*), (**), (***) точки M_1, O и M_2 принадлежат этому геометрическому месту.

Пусть M — какая-нибудь точка рассматриваемого геометрического места. Заметим, что отрезки AB и CD можно сдвигать вдоль сторон угла, ими образованного, не изменяя площади треугольников MAB и MCD. Сдвинем отрезки AB и CD так, чтобы B и C совпали с вершиной N этого угла (черт. 248, *б*). Пусть точки A и D совпадут при этом с P и Q соответственно, тогда вопрос о нашем геометрическом месте заменится вопросом о геометрическом месте вершин M четырехугольника $NPMQ$ с постоянной площадью. Но так как положение точек O, P, Q не зависит от положения точки M, то площадь треугольника PMQ должна оставаться постоянной. Для этого необходимо, чтобы точка M лежала на прямой $M'M'' \parallel PQ$, проходящей, очевидно, через точки M_1 и M_2. А это и требовалось доказать.

116. Построим на каждом круге, как на экваторе, сферу (черт. 249). Эти три сферы пересекаются в двух точках; две любые сферы пересекаются по окружности, а третья сфера пересекает окружность, по которой пересекаются две



Черт. 249.

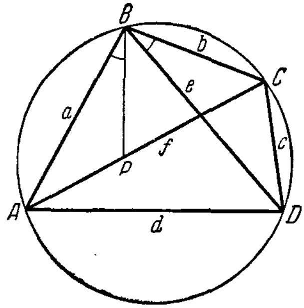
сферы, в двух точках, симметричных относительно общей диаметральной плоскости всех сфер. Проекциями окружностей, по которым пересекаются пары сфер, служат общие хорды пар окружностей, а проекция общих точек всех трех сфер принадлежит всем трем хордам данных кругов. Следовательно, эти хорды пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

117. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=f$ и $BD=e$ (черт. 250). Проведем через вершину B прямую BP такую, что $\angle ABP = \angle DBC$ (здесь P — точка на диагонали AC). Треугольники ABP и DBC подобны, так как $\angle ABP = \angle DBC$ (по построению) и $\angle BAP = \angle BDC$ (как опирающиеся на одну и ту же дугу описанного вокруг $ABCD$ круга). Из подобия этих треугольников имеем $\frac{AB}{AP} = \frac{BD}{CD}$, откуда

$$AB \cdot CD = AP \cdot BD,$$

т. е.

$$a \cdot c = AP \cdot e. \qquad (*)$$



Черт. 250.

Далее, треугольники PBC и ADB также подобны,

$$\angle PBC = \angle ABD,$$

так как

$$\angle DBC = \angle ABP,$$
$$\angle BCP = \angle BDA$$

как опирающиеся на одну и ту же дугу. Отсюда следует $\frac{BC}{PC} = \frac{BD}{AD}$, откуда

$$BC \cdot AD = PC \cdot BD,$$

т. е.

$$b \cdot d = PC \cdot e. \qquad (**)$$

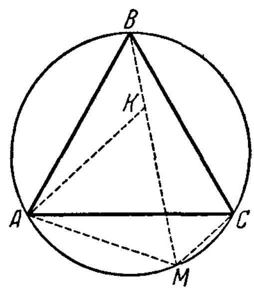
Сложив равенства (*) и (**), имеем

$$a \cdot c + b \cdot d = (AP + PC) \cdot e,$$

т. е.

$$a \cdot c + b \cdot d = ef,$$

что и требовалось доказать.



Черт. 251.

118. а) Первое решение. Пусть MB — наибольший из отрезков MA, MB и MC (черт. 251). Отложим на MB отрезок $MK = MA$. Так как $\angle KMA = \angle BCA = 60°$ (углы, опирающиеся на одну дугу), то треугольник AMK равносторонний, $AK = AM$. Далее, треугольники AMC и AKB равны (ибо $AC = AB$, $AM = AK$; $\angle CAM = \angle BAM = 60° = \angle BAK$).

Следовательно, $MC = BK$. Таким образом, имеем

$$MB = MK + KB = MA + MC,$$

что и требовалось доказать.

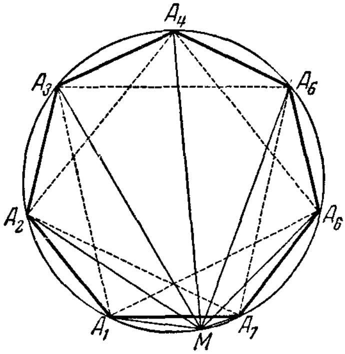
Второе решение. Применяя теорему Птолемея к четырехугольнику $ABCM$ (черт. 251), имеем

$$AM \cdot BC + CM \cdot AB = BM \cdot AC,$$

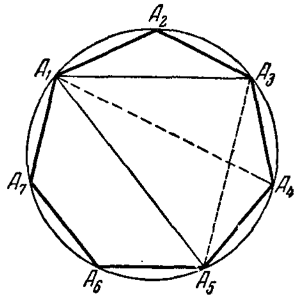
откуда, так как $AB = BC = AC$,

$$AM + CM = BM.$$

б) Обозначим сторону нашего n-угольника через a, а наименьшую диагональ $A_1A_3 = A_2A_4 = \ldots = A_nA_2$ через b (на черт. 252 изображен семиугольник).



Черт. 252.



Черт. 253.

Пусть $MA_1 = d_1$, $MA_2 = d_2$, $MA_3 = d_3$ и т. д. Применяя к вписанным четырехугольникам $MA_1A_2A_3$, $MA_2A_3A_4$, $MA_3A_4A_5$, ..., $MA_{n-1}A_nA_1$, $MA_nA_1A_2$ теорему Птолемея, получаем

$$\begin{aligned} a(d_1 + d_3) &= bd_2, \\ bd_3 &= a(d_2 + d_4), \\ a(d_3 + d_5) &= bd_4, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ bd_n + ad_1 &= ad_{n-1}, \\ bd_1 + ad_{n+1} &= ad_2. \end{aligned}$$

(Справа мы пишем отрезки с четными номерами, слева — с нечетными.) Сложив все эти равенства, получаем

$$(2a+b)(d_1+d_3+\ldots+d_{2n+1})=(2a+b)(d_2+\ldots+d_{2n}),$$

откуда

$$d_1+d_3+\ldots+d_{2n+1}=d_2+\ldots+d_{2n},$$

что и требовалось доказать.

119. Применим теорему Птолемея к четырехугольнику $A_1A_3A_4A_5$ (черт. 253); получим

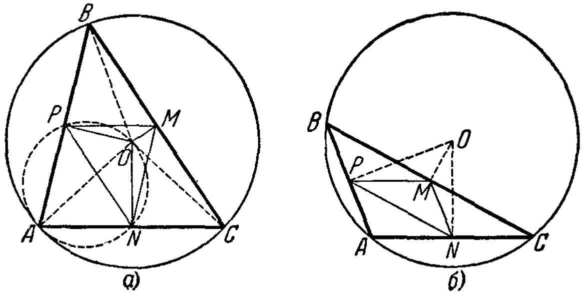
$$A_1A_3\cdot A_4A_5+A_3A_4\cdot A_1A_5=A_1A_4\cdot A_3A_5.$$

Разделив обе части этого равенства на $A_1A_2\cdot A_1A_3\cdot A_1A_4$ и воспользовавшись тем, что $A_4A_5=A_3A_4=A_1A_2$, $A_1A_5=A_1A_4$ и $A_3A_5=A_1A_3$, получим

$$\frac{1}{A_1A_4}+\frac{1}{A_1A_3}=\frac{1}{A_1A_2},$$

что и требовалось доказать.

120. Пусть ABC (черт. 254 *а*, *б*) — произвольный треугольник и O — центр описанной около него окружности.



Черт. 254.

Обозначим через d_1, d_2 и d_3 соответственно расстояния OM, ON и OP от точки O до сторон BC, AC и AB. Так как основания P, M и N перпендикуляров, опущенных из O на стороны треугольника ABC, совпадают с серединами его сторон, то треугольник MNP будет треугольником средних линий для $\triangle ABC$. Если треугольник ABC остроугольный (черт. 254, *а*), то его площадь равна сумме площадей треугольников AOB, BOC и COA. Подставляя выражения для площадей, получим

$$\frac{1}{2}a\,d_1+\frac{1}{2}\,b\,d_2+\frac{1}{2}\,c\,d_3=\frac{a+b+c}{2}\,r,$$

где a, b, c — стороны треугольника, r — радиус вписанной окружности.

Рассмотрим теперь четырехугольник $OPAN$. Он имеет два противоположных прямых угла и потому около него можно описать окружность. Применив к нему теорему Птолемея, получим

$$\frac{b}{2}\,d_3+\frac{c}{2}\,d_2=\frac{a}{2}\,R,$$

где R — радиус описанной окружности. Аналогично из четырехугольников $OMBN$ и $OPCM$ имеем

$$\frac{c}{2}\,d_1+\frac{a}{2}\,d_3=\frac{b}{2}\,R,$$

$$\frac{a}{2}\,d_2+\frac{b}{2}\,d_1=\frac{c}{2}\,R.$$

Складывая полученные четыре равенства и сокращая на $\frac{a+b+c}{2}$, мы получаем

$$d_1+d_2+d_3=R+r,$$

что и требовалось.

Доказательство несколько изменяется в том случае, когда треугольник ABC тупоугольный. Пусть, например, угол A тупой (черт. 254, *б*). В таком случае, очевидно, выписанные выше равенства заменятся следующими:

$$\frac{1}{2}\,a\,d_1+\frac{1}{2}\,b\,d_2-\frac{1}{2}\,c\,d_3=\frac{a+b+c}{2}\,r,$$

$$\frac{c}{2}\,d_2=\frac{b}{2}\,d_3+\frac{a}{2}\,R,$$

$$\frac{c}{2}\,d_1=\frac{a}{2}\,d_3+\frac{b}{2}\,R,$$

$$\frac{a}{2}\,d_2+\frac{b}{2}\,d_1=\frac{c}{2}\,R.$$

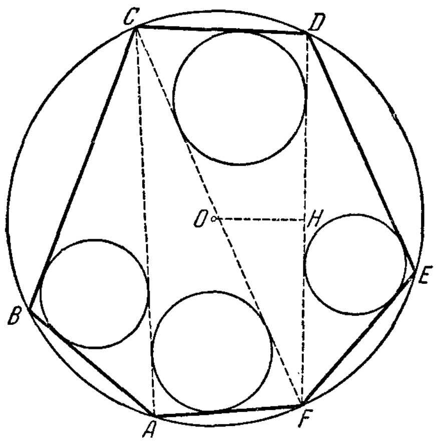
Складывая эти четыре равенства, перенеся члены с d_1, d_2, d_3 в одну сторону и сокращая на $\frac{a+b+c}{2}$, получим

$$d_1+d_2-d_3=R+r,$$

что и требовалось доказать.

121. Легко видеть, что многоугольник разбивается на $n-2$ треугольника, где n — число сторон многоугольника. Этот факт легко доказывается по индукции. Действительно, утверждение справедливо для $n=3$. Предположим, что оно справедливо для всех многоугольников с числом сторон, не превосходящих n, и покажем, что оно будет справедливо для $(n+1)$-угольников. Действительно, любая проведенная диагональ разбивает наш $(n+1)$-угольник на $(k+1)$-угольник и $(n-k+1)$-угольник. Так как, по предположению индукции, для них наше утверждение верно, то остальные диагонали разбивают их на $k-1$ и $n-k-1$ треугольников соответственно. Таким образом, общее число треугольников равно $n-2$, что и требовалось доказать.

Перейдем к решению самой задачи. Согласно теореме задачи 120 алгебраическая сумма расстояний от центра описанной окружности (в нашем случае являющегося центром описанной около всего многоугольника окружности) до сторон каждого треугольника равна сумме радиусов вписанной и описанной окружностей. Сложив все эти равенства, получим, что алгебраическая сумма расстояний центра описанной около многоугольника окружности до сторон всех треугольников разбиения равна $(n-2)R$ плюс сумма радиусов вписанных во все треугольники окружностей. Но в алгебраическую сумму расстояний входят один раз расстояния от центра до всех сторон рассматриваемого многоугольника и по два раза с противоположными знаками расстояния от центра до всех проведенных диагоналей. Действительно, к каждой проведенной диагонали примыкают два треугольника, один из которых лежит по ту же сторону от нее, что и центр O, а другой — по другую (например, на черт. 255 OH входит в алгебраическую сумму со знаком плюс для $\triangle CDF$ и со знаком минус для $\triangle DEF$). Таким образом, в общей сумме расстояния до диагоналей попарно уничтожаются, и мы получаем следующую теорему, обобщающую теорему задачи 120: алгебраическая сумма расстояний от центра описанной около многоугольника окружности до всех его сторон равна $(n-2)R$ плюс сумма



Черт. 255.

радиусов окружностей, вписанных во все треугольники разбиения. Иначе сумма радиусов всех вписанных в треугольники окружностей равна

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n - (n-2)R$$

(где d_1 — расстояние от центра до первой стороны и т. д.). Правая часть равенства не зависит от разбиения, поэтому и сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники разбиения, тоже не зависит от того, какими диагоналями было произведено разбиение.

122. Обозначим диагонали AC, CB', $B'A$ и $A'B$ шестиугольника соответственно через x, y, z и u (черт. 256). Применяя теорему Птолемея (задача 117) соответственно к четырехугольникам $ABCA'$ и $BCA'B'$, получим

$$ac + b'f = ux \text{ и } a'b' + cg = uy.$$

Умножим первое из этих равенств на b, а второе — на c' и сложим:

$$abc + a'b'c' + bb'f + cc'g = u(xb + yc').$$

Но в силу теоремы Птолемея из четырехугольника $ACB'C'$ находим: $xb + yc' = ez$; следовательно, имеем

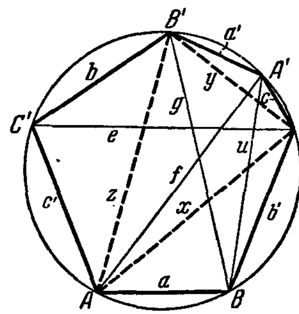
$$abc + a'b'c' + bb'f + cc'g = ezu.$$

Применив теорему Птолемея к четырехугольнику $AB'A'B$, получаем

$$zu = fg - aa'.$$

Таким образом,

$$abc + a'b'c' + bb'f + cc'g = \\ = efg - aa'e,$$



Черт. 256.

откуда и следует доказываемое соотнбшение.

123. а) Если окружность S_0, описанная около треугольника ABC, и окружность S касаются, то точка касания M будет их центром подобия (черт. 257, *а*, *б*). Поэтому для любых соответствующих друг другу точек X и Y окружностей S_0 и S имеем

$$\frac{MY}{MX} = c,$$

где c есть постоянное число, т. е. не зависит от выбора точки X на окружности S_0. Отсюда находим

$$\frac{XY}{XM} = 1 \pm c$$

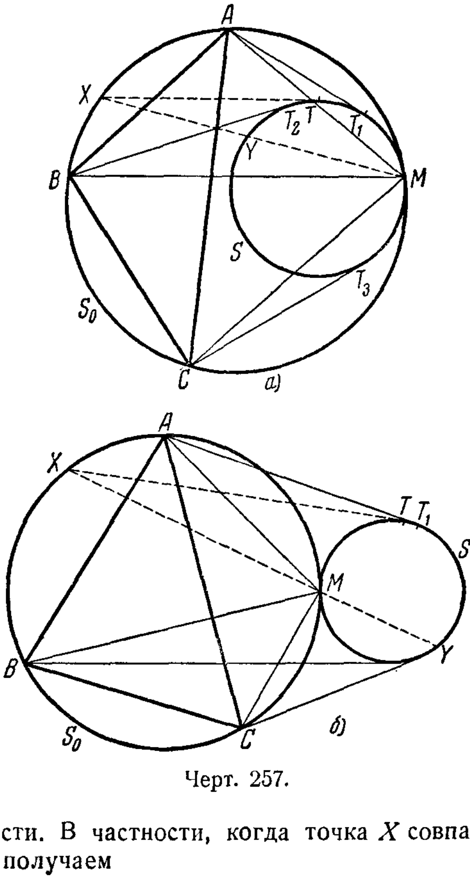
(знак минус относится к случаю, когда касание окружностей S и S_0 внутреннее, а знак плюс — когда касание этих окружностей внешнее, см. соответственно черт. 257, *а* и *б*). Но

$$\frac{XY}{XM} = \frac{XY \cdot XM}{XM^2} = \frac{XT^2}{XM^2},$$

где XT — касательная, проведенная из точки X к окружности S. Таким образом, имеем

$$\frac{XT}{XM}=\sqrt{1\pm c},$$

т. е. отношение $\frac{XT}{XM}$ тоже не зависит от положения точки X



Черт. 257.

на окружности. В частности, когда точка X совпадает с A, B или C, мы получаем

$$\frac{AT_1}{AM}=\frac{BT_2}{BM}=\frac{CT_3}{CM}=\sqrt{1\pm c}.$$

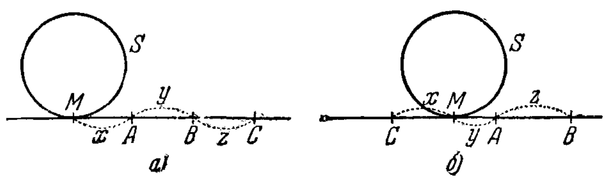
Применив теперь теорему Птолемея к четырехугольнику $ABCM$, подставив в полученное соотношение

$$AM=\frac{1}{\sqrt{1\pm c}}AT_1,\quad BM=\frac{1}{\sqrt{1\pm c}}BT_2,\quad CM=\frac{1}{\sqrt{1\pm c}}CT_3$$

и затем сократив на $\frac{1}{\sqrt{1\pm c}}$, мы придем к требуемому результату:

$$AT_1\cdot BC+CT_3\cdot AB=BT_2\cdot AC.$$

Примечание. Легко видеть, что результат настоящей задачи остается в силе и в том случае, когда S есть не окружность, а прямая, т. е. когда точки A, B, C лежат на одной прямой. В этом случае доказательство приводится к проверке простого алгебраического



Черт. 258.

тождества. Читатель сам легко сможет провести необходимые выкладки для двух могущих здесь представиться различных случаев (черт. 258, *а*, *б*).

б) Пусть r_1, r_2, r_3, r_4 и R суть соответственно радиусы окружностей C_1, C_2, C_3, C_4 и S; O_1, O_2, O_3, O_4 и O — центры этих окружностей и A_1, A_2, A_3, A_4 — точки касания окружностей C_1, C_2, C_3, C_4 с окружностью S (для определенности мы остановимся на случае, когда окружности C_1 и C_3 касаются окружности S внешне, а окружности C_2 и C_4 внутренне; черт. 259 [1]). Из равнобедренного треугольника OA_1A_2 ($OA_1=OA_2=R$) легко получаем

$$A_1A_2=2R\sin\frac{A_1OA_2}{2}.$$

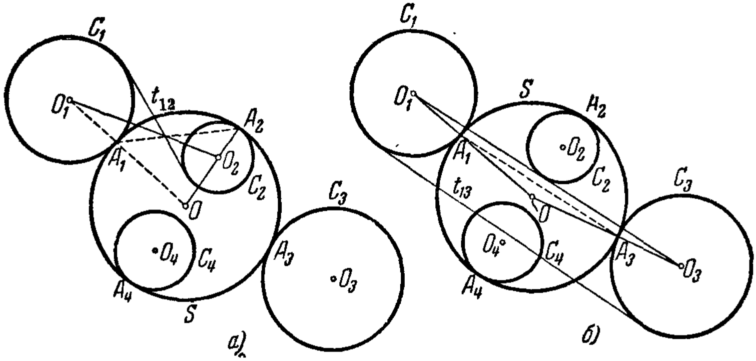
[1]) Мы рекомендуем читателю самостоятельно рассмотреть остальные предоставляющиеся здесь случаи.

Далее, из рассмотрения треугольника O_1OO_2 со сторонами $OO_1 = R + r_1$, $OO_2 = R - r_2$, $O_1O_2 = d_{12}$ имеем

$$\cos A_1OA_2 = \frac{(R+r_1)^2 + (R-r_2)^2 - d_{12}^2}{2(R+r_1)(R-r_2)},$$

откуда

$$\sin^2\frac{A_1OA_2}{2} = \frac{1-\cos A_1OA_2}{2} = \frac{d_{12}^2 - (r_1+r_2)^2}{4(R+r_1)(R-r_2)}.$$



Черт. 259.

Но, проведя общую касательную к окружностям C_1 и C_2, мы без труда получим (черт. 260)

$$t_{12}^2 = d_{12}^2 - (r_1+r_2)^2.$$

Таким образом, имеем

$$\sin^2\frac{A_1OA_2}{2} = \frac{t_{12}^2}{4(R+r_1)(R-r_2)}, \quad \sin\frac{A_1OA_2}{2} = \frac{t_{12}}{2\sqrt{(R+r_1)(R-r_2)}}$$

и, следовательно, окончательно

$$A_1A_2 = R\frac{t_{12}}{\sqrt{(R+r_1)(R-r_2)}}.$$

Аналогично

$$A_1A_3 = 2R\sin\frac{A_1OA_3}{2}, \quad \sin^2\frac{A_1OA_3}{2} = \frac{d_{13}^2 - (r_1-r_3)^2}{4(R+r_1)(R+r_3)},$$

$$t_{13}^2 = d_{13}^2 - (r_1-r_3)^2$$

(см. черт. 259, *б*); значит, $\sin\frac{A_1OA_3}{2}=\frac{t_{13}}{2\sqrt{(R+r_1)(R+r_3)}}$, и окончательно

$$A_1A_3=R\frac{t_{13}}{\sqrt{(R+r_1)(R+r_3)}};$$

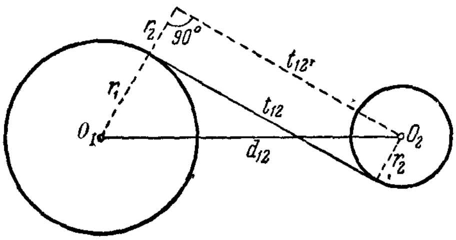
точно так же получаем

$$A_1A_4=R\frac{t_{14}}{\sqrt{(R+r_1)(R-r_4)}},\quad A_2A_3=R\frac{t_{23}}{\sqrt{(R-r_2)(R+r_3)}},$$
$$A_2A_4=R\frac{t_{24}}{\sqrt{(R-r_2)(R-r_4)}},\quad A_3A_4=R\frac{t_{34}}{\sqrt{(R+r_3)(R-r_4)}}.$$

Но четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ вписан в круг S; следовательно, для него справедлива теорема Птолемея

$$A_1A_2\cdot A_3A_4+A_2A_3\cdot A_1A_4=A_1A_3\cdot A_2A_4.$$

Подставив в это соотношение полученные выражения для



Черт. 260.

A_1A_2, A_1A_3 и т. д. и сократив обе части равенства на

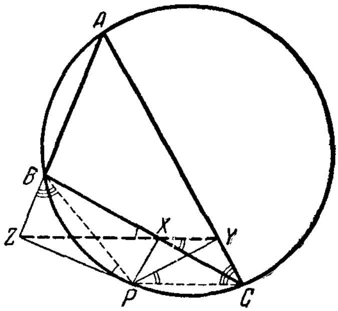
$$\frac{R^2}{\sqrt{(R+r_1)(R-r_2)(R+r_3)(R-r_4)}},$$

мы придем к требуемому соотношению.

Примечание I. Эта теорема также остается в силе в том случае, когда S есть прямая, а не окружность.

Примечание II. Теорема задачи 123 б) остается справедливой и в том случае, когда некоторые из окружностей C_1, C_2, C_3, C_4 имеют радиус нуль (т. е. являются точками). (Если при этом три окружности являются точками — мы приходим к теореме задачи 123а), а если все четыре окружности заменить точками — к теореме Птолемея).

124. а) Пусть ABC — произвольный треугольник, X, Y и Z — основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки P описанной около этого треугольника окружности на его стороны (черт. 261). Четырехугольники $PXBZ$ и $PXYC$ как имеющие по два противолежащих прямых угла можно вписать в окружность, следовательно,



Черт. 261.

$$\angle ZXB = \angle ZPB$$

и

$$\angle CXY = \angle CPY.$$

Но

$$\angle ZPB = 90° - \angle PBZ$$

и

$$\angle YPC = 90° - \angle YCP,$$

а так как углы PBZ и YCP равны (ибо $\angle ACP = 180° - \angle ABP$), то

$$\angle ZXB = \angle CXY,$$

что возможно только в том случае, если точки Y, X и Z лежат на одной прямой.

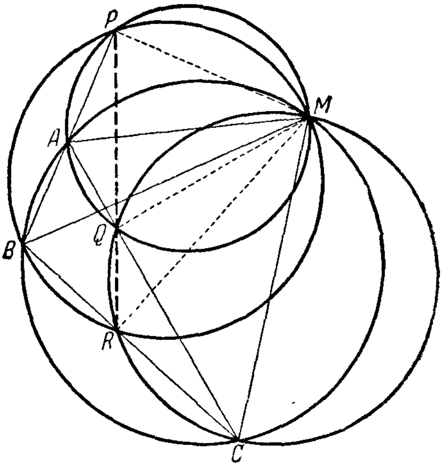
Примечание. Другое доказательство этой теоремы дано выше в решении задачи 90 а).

б) Легко видеть, что, например, точка P (черт. 262) пересечения окружностей, построенных на MA и MB, как на диаметрах, есть основание перпендикуляра, опущенного из M на AB (ибо $\angle MPA = \angle MPB = 90°$). Аналогично точки Q и R являются основаниями перпендикуляров, опущенных из M на стороны AC и BC треугольника ABC. Таким образом требуемый результат непосредственно следует из теоремы задачи а).

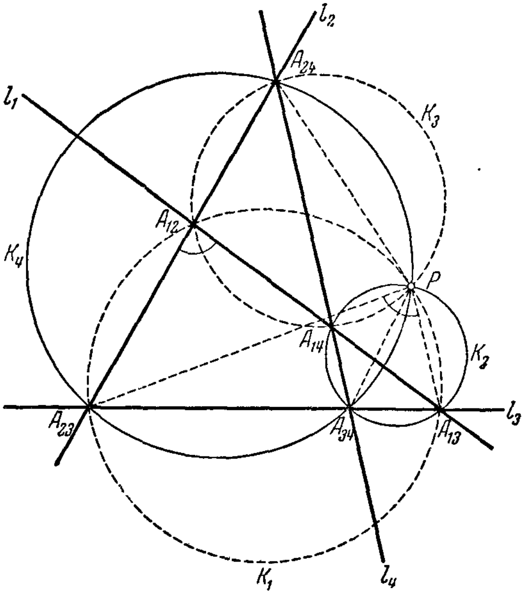
125. а) Пусть даны четыре прямые l_1, l_2, l_3 и l_4. Обозначим точки пересечения прямых l_m и l_n через A_{mn}, так что точка пересечения прямых l_1 и l_2 есть A_{12} и т. д. (черт. 263). Докажем, что центральные окружности треугольников

$$A_{12}A_{13}A_{23};\quad A_{13}A_{14}A_{34};\quad A_{12}A_{14}A_{24};\quad A_{23}A_{24}A_{34}$$

пересекаются в одной точке. Обозначим эти окружности соответственно через K_1, K_2, K_3, K_4. Окружности K_2 и K_4



Черт. 262.



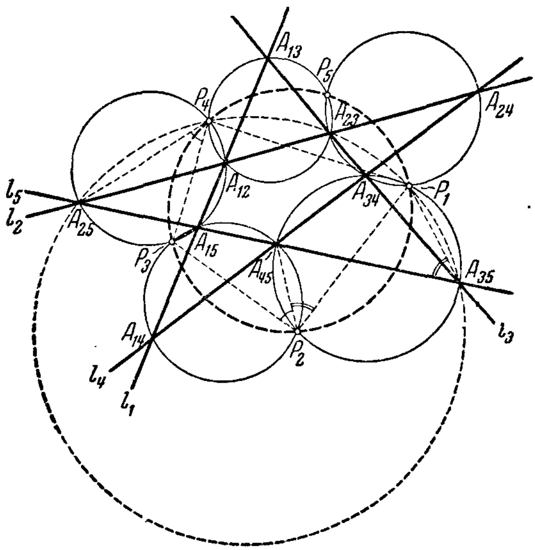
Черт. 263.

имеют общую точку A_{34}; пусть P — вторая точка их пересечения. Тогда $\angle A_{34}PA_{23} = \angle A_{34}A_{24}A_{12}$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности K_4), $\angle A_{13}PA_{34} = \angle A_{13}A_{14}A_{34}$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности K_2).

Далее, из $\triangle A_{12}A_{14}A_{24}$ имеем

$$\angle A_{23}A_{12}A_{13} = \angle A_{12}A_{24}A_{14} + \angle A_{12}A_{14}A_{24} = \angle A_{23}A_{24}A_{34} + \angle A_{34}A_{14}A_{13} = \angle A_{23}PA_{34} + \angle A_{34}PA_{13} = \angle A_{23}PA_{13}.$$

Отсюда следует, что точка P лежит на окружности, проходящей через точки A_{12}, A_{13} и A_{23}, т. е. на окружности K_1.



Черт. 264.

Точно так же доказывается, что эта точка лежит и на окружности K_3.

б) Пусть даны пять прямых l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 (черт. 264). Рассмотрим всевозможные четверки этих прямых. Обозначим снова точку пересечения прямых l_m и l_n через A_{mn}. Обозначим, далее, центральную точку прямых l_1, l_2, l_3, l_4 через P_5, центральную точку прямых l_1, l_2, l_3, l_5 через P_4 и т. д.

(Точка P_5 является отличной от A_{23} точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников $A_{12}A_{13}A_{23}$ и $A_{34}A_{24}A_{23}$; аналогично получаются и точки P_1, P_2, P_3, P_4; черт. 264.)

Докажем, что все пять точек P_1, P_2, ..., P_5 лежат на одной окружности. Заметим прежде всего, что точки A_{25}, P_4, A_{23}, P_1 и A_{35} лежат на одной окружности. Действительно, P_4 как центральная точка четверки прямых 1, 2, 3 и 5 лежит на окружности, описанной вокруг треугольника $A_{25}A_{23}A_{35}$; P_1 как центральная точка прямых 2, 3, 4 и 5 тоже лежит на окружности, описанной около этого треугольника.

Покажем теперь, что точки P_1, P_2, P_3, P_4 лежат на одной окружности. Имеем $\angle A_{45}P_2P_3 = \angle P_3A_{15}A_{25}$, так как четырехугольник $P_2A_{45}A_{15}P_3$ вписан в окружность; $\angle P_3A_{15}A_{25} = \angle P_3P_4A_{25}$, так как точки P_3, A_{15}, P_4 и A_{25} лежат на одной окружности; следовательно,

$$\angle A_{45}P_2P_3 = \angle P_3P_4A_{25}.$$

С другой стороны, $\angle A_{45}P_2P_1 = \angle A_{45}A_{35}P_1$, так как точки A_{45}, P_2, A_{35} и P_1 лежат на одной окружности; $\angle A_{45}A_{35}P_1 + \angle A_{52}P_4P_1 = 180°$, так как четырехугольник $A_{45}A_{35}P_1P_4$ вписан в окружность; следовательно,

$$\angle A_{45}P_4P_1 + \angle A_{25}P_4P_1 = 180°.$$

Теперь имеем

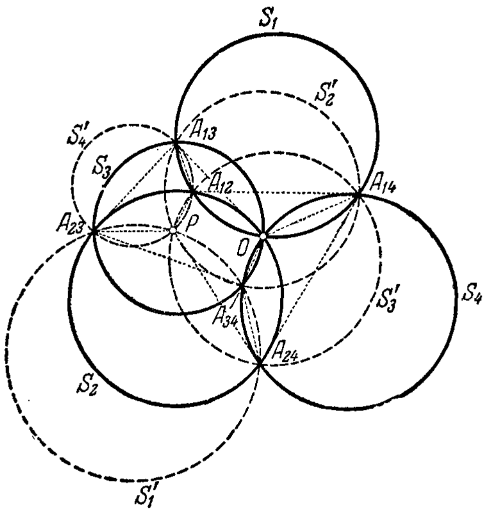
$$\angle P_3P_2P_1 + \angle P_3P_4P_1 =$$
$$= \angle A_{45}P_2P_1 + \angle A_{45}P_2P_3 + \angle A_{25}P_4P_1 - \angle A_{25}P_4P_3 =$$
$$= \angle A_{45}P_2P_1 + \angle A_{25}P_4P_1 = 180°,$$

откуда и следует, что точки P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат на одной окружности.

Точно так же доказывается, что точки P_1, P_2, P_3 и P_5 лежат на одной окружности, откуда вытекает, что пять точек P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 лежат на одной окружности.

Примечание. Нетрудно видеть, что из доказанной теоремы вытекает следующая: если около пяти треугольников, образовавшихся при продолжении сторон выпуклого пятиугольника до получения пятиугольной звезды, описаны окружности, то вторые точки пересечения соседних из этих окружностей лежат на одной окружности (см. черт. 264).

в) По определению две прямые определяют центральную точку — точку их пересечения; три прямые определяют центральную окружность — окружность, проходящую через три центральные точки, отвечающие трем парам прямых, которые можно выбрать из нашей тройки. Мы установили, далее, что четыре прямые определяют центральную точку — точку пересечения четырех центральных окружностей, отвечающих четырем тройкам прямых, которые можно выбрать из нашей



Черт. 265.

четверки прямых (задача 125а)); пяти прямым отвечает центральная окружность — окружность, проходящая через пять центральных точек, отвечающих пяти четверкам прямых, которые можно выбрать из нашей пятерки прямых (задача 125 *б*). Естественно думать, что аналогичное положение имеет место и для большего числа прямых, т. е. что шесть прямых определяют центральную точку — точку пересечения шести центральных окружностей, отвечающих шести пятеркам прямых, которые можно выбрать из шести прямых (т. е. что эти шесть центральных окружностей пересекаются в одной точке); семь прямых определяют центральную окружность — окружность, проходящую через семь центральных точек, отвечающих семи шестеркам прямых, которые можно выбрать из семи прямых (т. е. что эти семь центральных точек лежат на одной окружности) и т. д.; другими словами, естественно предположить, что каждое четное число прямых (никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке) определяет центральную точку, а нечетное число прямых — центральную окружность. Докажем, что это действительно так.

Докажем прежде одно вспомогательное предложение. А именно, пусть S_1, S_2, S_3 и S_4 — четыре окружности, пересекающиеся в одной точке O (черт. 265). Мы утверждаем, что четыре окружности, каждая из которых проходит через вторые точки пересечения каких-либо трех из наших окружностей, пересекаются в одной точке P. (Эту точку естественно называть центральной точкой четырех окружностей.)

Обозначим аналогично тому, как мы поступали выше, точку пересечения окружностей S_1 и S_2 через A_{12} и т. д. Пусть P есть точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников $A_{12}A_{13}A_{23}$ и $A_{12}A_{14}A_{24}$. Докажем, что и окружности, описанные вокруг треугольников $A_{13}A_{14}A_{34}$ и $A_{23}A_{24}A_{34}$, проходят через ту же точку P.

Из рассмотрения окружностей, описанных около треугольников $A_{12}A_{13}A_{23}$ и $A_{12}A_{14}A_{24}$, имеем [1])

$$\angle A_{23}PA_{12} = 180^\circ - \angle A_{23}A_{13}A_{12},$$
$$\angle A_{24}PA_{12} = 180^\circ - \angle A_{24}A_{14}A_{12}.$$

Складывая два последних равенства почленно, получаем

$$360^\circ - \angle A_{23}PA_{24} = \angle A_{23}PA_{12} + \angle A_{24}PA_{12} = 360^\circ - \angle A_{23}A_{13}A_{12} - \angle A_{24}A_{14}A_{12} = 360^\circ - (\angle A_{23}A_{13}O + \angle A_{12}A_{13}O) - (\angle A_{24}A_{14}O + \angle A_{12}A_{14}O).$$

Но из рассмотрения окружностей S_1, S_3 и S следует

$$\angle A_{23}A_{13}O = 180^\circ - \angle A_{23}A_{34}O, \qquad \angle A_{12}A_{13}O = \angle A_{12}A_{14}O;$$
$$\angle A_{24}A_{14}O = 180^\circ - \angle A_{24}A_{34}O;$$

и, значит, предыдущее равенство можно переписать так:

$$\angle A_{23}PA_{24} = 180^\circ - \angle A_{23}A_{34}O - \angle A_{12}A_{14}O + 180^\circ - \angle A_{24}A_{34}O + \angle A_{12}A_{14}O = 360^\circ - \angle A_{23}A_{34}O - \angle A_{24}A_{34}O = A_{23}A_{34}A_{24}.$$

[1]) См. сноску на стр. 237.

Отсюда вытекает, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника $A_{23}A_{34}A_{24}$. Точно так же доказывается, что эта точка лежит также на окружности, описанной около треугольника $A_{13}A_{14}A_{34}$.

Теперь мы можем уже доказать основное утверждение задачи. Доказательство будем проводить методом математической индукции, а именно, считая, что это утверждение уже доказано для каждого числа прямых, меньшего некоторого фиксированного числа n, покажем, что теорема справедлива также и для n прямых. При этом приходится различать случаи четного и нечетного n.

А. n есть число четное. Обозначим наши прямые цифрами $1, 2, \ldots, n$; n четно ($n=2k$). Пусть C_1 есть центральная окружность $n-1$ прямых $2, 3, 4, \ldots, n$, C_2 — центральная окружность $n-1$ прямых $1, 3, 4, \ldots, n$ и т. д., наконец, C_n — центральная окружность $n-1$ прямых $1, 2, 3, \ldots, n-1$ (для $n-1$ прямых мы считаем теорему уже доказанной). Нам надо доказать, что n окружностей $C_1, C_2, \ldots, C_n$ пересекаются в одной точке.

Докажем прежде всего, что окружности C_1, C_2, C_3 и C_4 пересекаются в одной точке. Обозначим через A_{12} центральную точку $n-2$ прямых $3, 4, \ldots, n$, через A_{13} — центральную точку $n-2$ прямых $2, 4, \ldots, n$ и т. д. (для $n-2$ прямых теорема тоже считается доказанной). Далее, через C_{123} обозначим центральную окружность $n-3$ прямых $4, 5, \ldots, n$; через C_{124} — центральную окружность $n-3$ прямых $3, 5, \ldots$ $\ldots, n$ и т. д. (для $n-3$ прямых теорема считается доказанной) и через A_{1234} — центральную точку $n-4$ прямых $5, 6, \ldots, n$ (для $n-4$ прямых теорема считается доказанной).

В силу определения центральных окружностей и точек имеем (черт. 266):

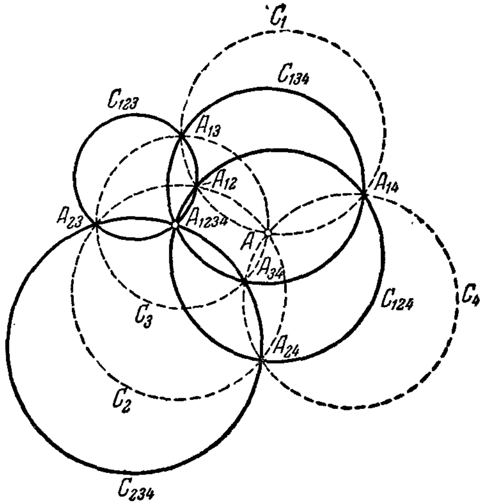
1° Все четыре окружности C_{123}, C_{124}, C_{134} и C_{234} проходят через одну точку A_{1234}.

2° Точка A_{12} лежит на окружностях C_{123} и C_{124}, т. е. является точкой пересечения этих окружностей; точно так же A_{13} есть точка пересечения окружностей C_{123} и C_{134} и т. д.

3° Окружность C_1 проходит через точки A_{12}, A_{13} и A_{14}, т. е. C_1 есть окружность, описанная вокруг треугольника $A_{12}A_{13}A_{14}$; точно так же C_2 есть окружность, описанная вокруг треугольника $A_{12}A_{23}A_{24}$ и т. д.

Теперь из сравнения черт. 265 и черт. 266 сразу следует, что окружности C_1, C_2, C_3 и C_4 пересекаются в одной точке A (это будет центральная точка четырех окружностей C_{123}, C_{124}, C_{134} и C_{234}).

Точно так же показывается, что окружности C_1, C_2, C_3 и C_5 пересекаются в одной точке; что окружности C_1, C_2, C_3 и C_6 пересекаются в одной точке и т. д. Другими словами,

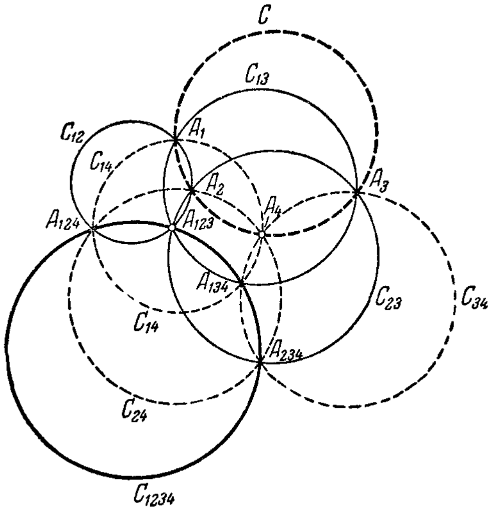


Черт. 266.

все окружности C_5, C_6, ..., C_n проходят через точку A — точку пересечения окружностей C_1, C_2, C_3 и C_4. А это нам и требовалось доказать.

Б. *n* есть число нечетное. Обозначим наши прямые, как и раньше, цифрами 1, 2, ..., n $(n=2k+1)$, и пусть A_1 есть центральная точка $n-1$ прямых 2, 3, 4, ..., n, A_2 — центральная точка $n-1$ прямых 1, 3, 4, ..., n и т. д., наконец, A_n — центральная точка $n-1$ прямых 1, 2, 3, ..., $n-1$. Нам надо доказать, что n точек A_1, A_2, ..., A_n лежат на одной окружности.

Докажем прежде всего, что точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной окружности. Обозначим через C_{12} центральную окружность $n-2$ прямых 3, 4, ..., n, через C_{13} — центральную окружность $n-2$ прямых 2, 4, ..., n и т. д., через A_{123} — центральную точку $n-3$ прямых 4, 5, ..., n, через A_{124} — центральную точку $n-3$ прямых 3, 5, ..., n и т. д. и, наконец, через C_{1234} — центральную окружность $n-4$ прямых 5, 6, ..., n.



Черт. 267.

В силу определения центральных точек и окружностей имеем (черт. 267):

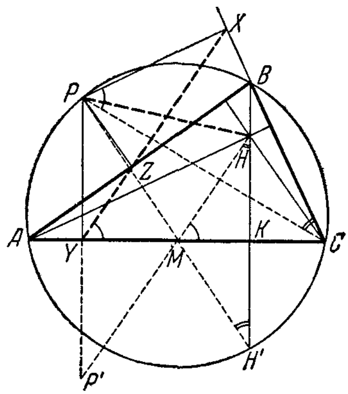
1° Четыре точки A_{123}, A_{124}, A_{134} и A_{234} лежат на одной окружности C_{1234}.

2° Окружность C_{12} проходит через точки A_{123} и A_{124}; точно так же окружность C_{13} проходит через точки A_{123} и A_{134}; окружность C_{14} проходит через точки A_{124} и A_{134} и т. д.

3° Точка A_1 лежит на окружностях C_{12}, C_{13} и C_{14}, т. е. A_1 есть точка пересечения трех окружностей C_{12}, C_{13} и C_{14}; точно так же A_2 есть точка пересечения C_{12}, C_{23} и C_{24} и т. д.

Рассмотрим теперь четыре окружности C_{12}, C_{13}, C_{23} и C_{1234}. Все эти четыре окружности пересекаются в одной точке — точке A_{123}. Попарные точки пересечения этих окружностей, отличные от точки A_{123}, очевидно, суть A_1 (точка пересечения C_{12} и C_{13}), A_2, A_3, A_{124} (точка пересечения C_{12} и C_{1234}), A_{134} и A_{234}. Далее, окружность, описанная вокруг треугольника $A_1A_{124}A_{134}$, есть C_{14}; окружность, описанная вокруг треугольника $A_3A_{124}A_{234}$, есть C_{24}, окружность, описанная вокруг треугольника $A_3A_{123}A_{234}$, есть C_{23}. Эти три окружности пересекаются в точке A_2. Следовательно, A_4 есть центральная точка четырех окружностей C_{12}, C_{13} и C_{23} и C_{1234}. Отсюда следует, что и окружность, описанная вокруг треугольника $A_1A_2A_3$, проходит через эту же точку, т. е. что точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной окружности.

Точно так же показывается, что точки A_1, A_2, A_3 и A_5 лежат на одной окружности; что точки A_1, A_2, A_3 и A_6 лежат на одной окружности и т. д. Другими словами, все точки A_4, A_5, ..., A_n лежат на одной окружности — на окружности, описанной около треугольника $A_1A_2A_3$. А это и требовалось доказать.



Черт. 268.

126. Предварительно заметим следующее. Пусть точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, и пусть Z, Y, X — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны AB, AC и BC треугольника (черт. 268). В таком случае точки X, Y, Z лежат на одной прямой (см. задачу 124а)). Докажем, что прямая YZX делит пополам отрезок, соединяющий точку P с ортоцентром H треугольника ABC.

Обозначим через P' точку, симметричную точке P относительно прямой AC, через H' — точку пересечения высоты BK с описанной окружностью и через M — точку пересечения прямых PH' и $P'H$. Тогда $HK = KH'$, ибо прямоугольные треугольники HKC и $H'KC$ равны, как имеющие общий катет KC и равные острые углы $\angle HCK = 90° - \angle A = \angle ABH' = \angle ACH'$. Следовательно, точка H' симметрична точке H относительно прямой AC; отсюда следует, что точка M лежит на AC и $\angle PH'H = \angle P'HH'$. Далее, так как $\angle PXC = \angle PYC = 90°$, то точки P, X, C и Y лежат на одной окружности с диаметром PC. Отсюда следует, что $\angle CYX = \angle CPX$.

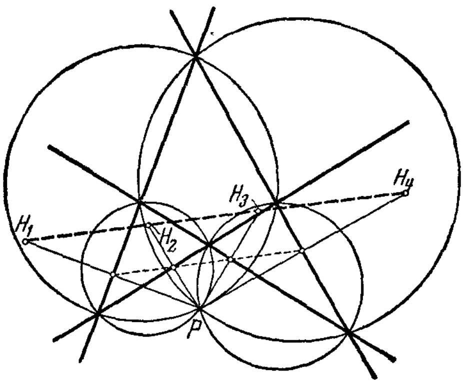
Теперь имеем

$$\angle HMC = 90° - \angle P'HH' = 90° - \angle PH'B = \\ = 90° - \angle PCB = \angle CPX = \angle CYX,$$

т. е.

$$HM \parallel XY.$$

Так как $P'Y = YP$, то YZX есть средняя линия треугольника $P'PH$, и, следовательно, делит его сторону PH пополам.

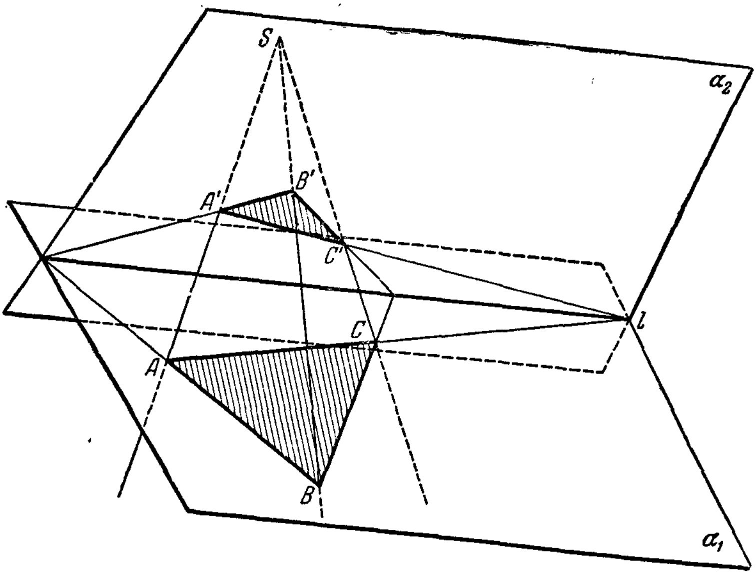


Черт. 269.

Теперь перейдем к решению самой задачи. Опишем окружности вокруг всех четырех треугольников задачи (черт. 269). Эти четыре окружности все пересекаются в некоторой точке P (см. задачу 125 а)). Из того, что каждые два из наших четырех треугольников имеют общую пару сторон, следует, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P на все четыре прямые, лежат на одной прямой (см. задачу 124 а)). В силу доказанного выше это означает, что середины отрезков PH_1, PH_2, PH_3, PH_4, где H_1, H_2, H_3, H_4 — ортоцентры четырех треугольников, образованных рассматриваемыми прямыми, лежат на одной прямой. А отсюда следует, что и сами точки H_1, H_2, H_3, H_4 лежат на одной прямой.

Примечание. Любопытно отметить, что прямая, на которой лежат точки H_1, H_2, H_3, H_4, перпендикулярна к прямой, соединяющей середины трех диагоналей полного четырехсторонника, образованного нашими четырьмя прямыми (см. задачу 114). Предоставляем читателю самостоятельно доказать это утверждение.

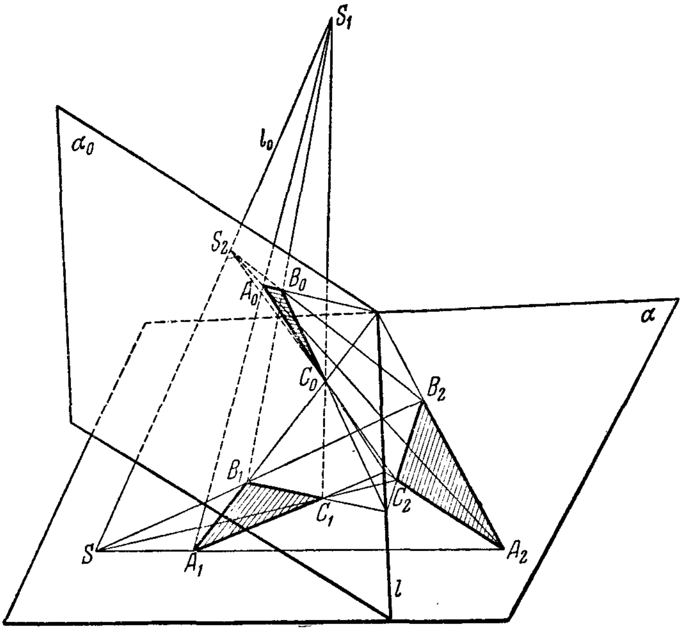
127. Докажем теорему сначала для того случая, когда треугольники ABC и $A'B'C'$ лежат в разных плоскостях α_1 и α_2 (черт. 270). Пусть S — точка пересечения прямых AA',



Черт. 270.

BB', CC', а l — прямая пересечения плоскостей α_1 и α_2. Рассмотрим, например, пару сторон AB и $A'B'$. Они лежат в одной плоскости $SA'ABB'$ и поэтому пересекаются (или параллельны). С другой стороны, AB лежит в плоскости α_1, а $A'B'$ — в плоскости α_2. Поэтому точка пересечения должна лежать на прямой l линии пересечения этих плоскостей. Точно так же доказывается, что и две другие точки пересечения тоже лежат на l. Если пара соответственных сторон параллельна, то они, очевидно, параллельны прямой l.

Обратно, пусть соответственные стороны треугольников ABC и $A'B'C'$, лежащих в различных плоскостях, пересекаются в точках одной прямой. Тогда, так как прямые AA' и BB' лежат в одной плоскости, они пересекаются в некоторой точке S_1; точно так же прямые BB' и CC' пересекаются в точке S_3 и прямые AA' и CC' — в точке S_2. Если бы точки S_1,S_2 и S_3 были различны, то прямые AA', BB' и CC', а следовательно, и оба данных треугольника лежали бы в одной плоскости S_1,S_2S_3,что, однако, противоречит предположению.



Черт. 271.

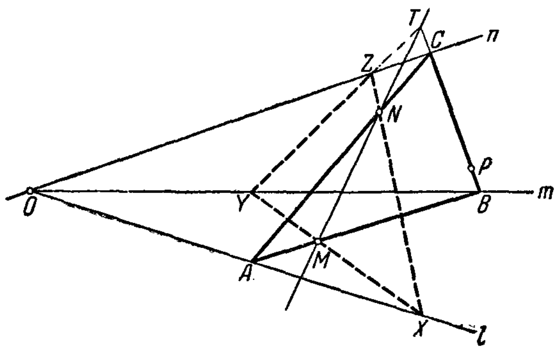
Если бы оказалось, что $AA' \| BB'$, то отсюда следовало бы, что S_2 и S_3 не могут совпасть. Значит, или $CC' \| AA'$, или CC' лежат в плоскости $AA'BB'$. Так как вторая возможность противоречит сделанному предположению, то или AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке, или $AA' \| BB' \| CC'$.

Пусть теперь треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат в одной плоскости α и пусть прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке S (черт. 271). Через точку S проведем произвольную прямую l_0, не лежащую в плоскости α_0, и возьмем на ней произвольные точки S_1 и S_2. Точку S_1 соединим с вершинами треугольника $A_1B_1C_1$; точку S_2 — с вершинами треугольника $A_2B_2C_2$. Прямые S_1A_1 и S_2A_2, лежащие в одной плоскости S_1SA_1, пересекаются в некоторой точке A_0. Аналогично, прямые S_1B_1 и S_2B_2, а также S_1C_1 и S_2C_2 пересекаются соответственно в некоторых точках B_0 и C_0. Треугольник $A_0B_0C_0$ удовлетворяет вместе с каждым из данных треугольников условиям теоремы Дезарга. Точки пересечения соответственных сторон этого треугольника и каждого из данных совпадают с точками пересечения его сторон с прямой l, по которой пересекаются плоскость α и плоскость α_0 треугольника $A_0B_0C_0$. Следовательно, соответственные стороны исходных треугольников пересекаются в точках, лежащих на одной прямой l.

Пусть, обратно, сходственные стороны лежащих в одной плоскости α треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ пересекаются в точках M, N, P одной прямой l. Проведем через эту прямую произвольную плоскость α_0 и в плоскости α_0 через точки M, N, P проведем три прямые, не проходящие через одну точку. Образованный ими в плоскости α_0 треугольник $A_0B_0C_0$ (черт. 271) вместе с каждым из данных удовлетворяет условиям теоремы Дезарга. Так как, кроме того, они лежат в разных плоскостях, то по доказанному прямые A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0 пересекаются в некоторой точке S_1, а прямые A_2A_0, B_2B_0, C_2C_0 — в некоторой точке S_2. Прямые S_1A_1 и S_2A_2 пересекаются в точке A_0 и, следовательно, лежат в одной плоскости, а потому прямая S_1S_2 пересекает прямую A_1A_2 в точке S, которая совпадает с точкой пересечения прямой S_1S_2 с плоскостью α_0. Через эту же точку проходят и прямые B_1B_2 и C_1C_2.

Примечание. Более тщательный анализ доказательства приводит к следующим результатам: если прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке или параллельны, то либо три точки пересечения соответственных сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ лежат на одной прямой, либо две соответственные стороны параллельны между собой и параллельны прямой, соединяющей точки пересечения остальных двух пар соответственных сторон, либо, наконец, каждые две соответственные стороны параллельны между собой. Имеет место также и обратная теорема.

128. Пусть M, N, P — данные точки; O — точка пересечения заданных прямых l, m, n; ABC — искомый треугольник; XYZ — произвольный треугольник, вершины которого лежат на прямых l, m и n и две стороны XY и XZ проходят соответственно через точки M и N (черт. 272). Так как прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников ABC и XYZ, проходят через одну точку O, то в силу теоремы Дезарга (см. задачу 127) точки пересечения их соответственных сторон должны лежать на одной прямой.



Черт. 272.

Отсюда вытекает следующее построение. Произвольную точку X на прямой l соединяем с точками M и N. Затем прямую, соединяющую точки Y и Z пересечения прямых XM и XN с m и n соответственно, пересекаем прямой MN. Соединяя полученную точку T с точкой P, получим одну из сторон искомого треугольника.

129. Пусть G — точка пересечения сторон AB и DE шестиугольника $ABCDEF$, H — точка пересечения BC и EF, K — точка пересечения CD и FA (черт. 273). Опишем вокруг треугольников BDG и DFK окружности; пусть Z — точка пересечения этих окружностей, отличная от D. Очевидно, имеем:

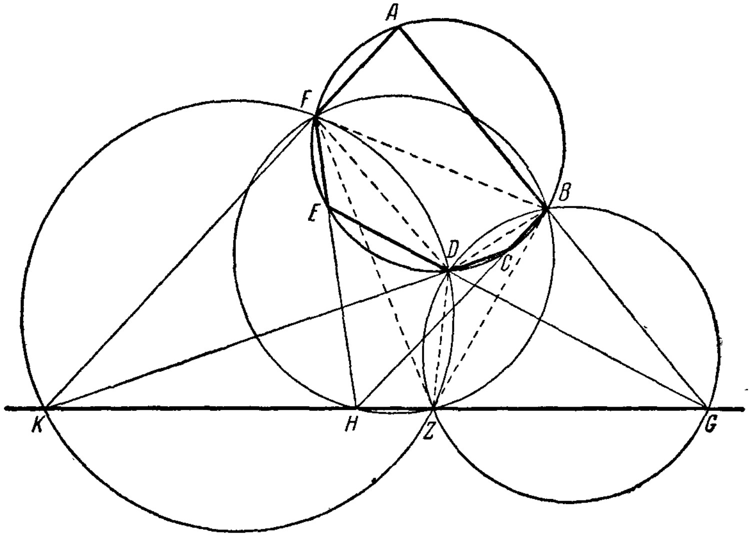
$$\angle BZD = \angle BGD = \frac{\smile EFA - \smile BCD}{2},$$

$$\angle DZF = \angle DKF = \frac{\smile ABC - \smile DEF}{2}.$$

Отсюда (см. черт. 273)[1])

$$\angle BZF = \angle BZD + \angle DZF =$$
$$= \frac{\smile EFA - \smile BCD + \smile ABC - \smile DEF}{2} =$$
$$= \frac{\smile FA - \smile DE - \smile CD + \smile AB}{2} = \frac{\smile FAB - \smile CDE}{2} = \angle BHF;$$

следовательно, и окружность, описанная вокруг треугольника BFH, проходит через точку Z.



Черт. 273.

Далее, имеем

$$\angle DZG = 180^\circ - \angle DBG = \angle DBA = \frac{\smile DEFA}{2};$$
$$\angle DZK = 180^\circ - \angle DFK = \angle DFA = \frac{\smile ABCD}{2};$$

отсюда

$$\angle DZG + \angle DZK = \frac{\smile DEFA}{2} + \frac{\smile ABCD}{2} = 180^\circ,$$

и значит, точки G, Z и K лежат на одной прямой.

[1]) См. сноску на стр. 237.

Аналогично

$$\angle BZG = \angle BDG = 180° - \angle BDE = 180° - \frac{\smile EFAB}{2},$$

$$\angle BZH = 180° - \angle BFH = 180° - \frac{\smile BCDE}{2};$$

отсюда

$$\angle BZG + \angle BZH = 360° - \frac{\smile EFAB}{2} - \frac{\smile BCDE}{2} =$$
$$= 360° - 180° = 180°,$$

и значит, точки G, Z и H лежат на одной прямой.

Из того, что C, Z и K лежат на одной прямой и G, Z и H лежат на одной прямой, следует, что точки Z, G, K и H лежат на одной прямой. Что и требовалось доказать.

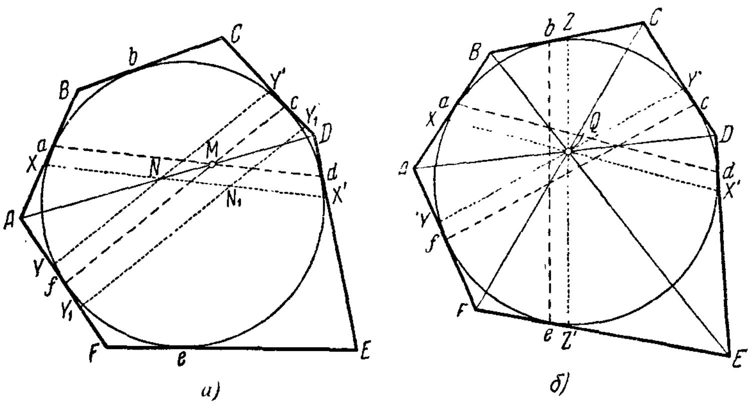
Примечание. Предоставляем читателю самостоятельно доказать, что если шестиугольник вписан в окружность, то либо три точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой, (случай, рассмотренный в решении задачи 129), либо две противоположные стороны параллельны между собой и параллельны прямой, соединяющей между собой точки пересечения двух других пар противоположных сторон, либо, наконец, каждые две противоположные стороны шестиугольника параллельны между собой.

130. Первое решение. Пусть $ABCDEF$ — описанный вокруг окружности шестиугольник, a, b, c, d, e, f — точки касания сторон шестиугольника с окружностью (черт. 274, a). Для доказательства теоремы Брианшона воспользуемся одним любопытным свойством диагоналей AD, BE и CF шестиугольника.

В силу предложения задачи 105 диагональ AD проходит через точку M пересечения прямых ad и cf (для доказательства достаточно рассмотреть описанный вокруг окружности четырехугольник, образованный сторонами AB, CD, DE и FA шестиугольника). Проведем теперь из произвольной точки N диагонали AD прямые XX' и YY', параллельные соответственно ad и cf; пусть X, X', Y и Y' — точки пересечения этих прямых со сторонами AB, ED, AF и CD шестиугольника. Очевидно, $Aa = Af$ (касательные к окружности, проведенные из одной точки) и $\frac{AX}{Aa} = \frac{AN}{AM} = \frac{AY}{Af}$ (так как треугольники AXN и AaM, AYN и AfM подобны). Отсюда следует, что $AX = AY$ и, значит,

$$aX = fY;$$

при этом здесь слово **равные** имеет тот смысл, что отрезки равны по величине и оба направлены (от точек a и f) к точке A (или оба направлены от A). Если же точка N_1 **не лежит** на диагонали AD, то прямые XX' и Y_1Y_1', параллельные соответственно ad и fc, отсекают на сторонах AB и AF шестиугольника неравные отрезки: $aX \neq Y_1f$ (см.

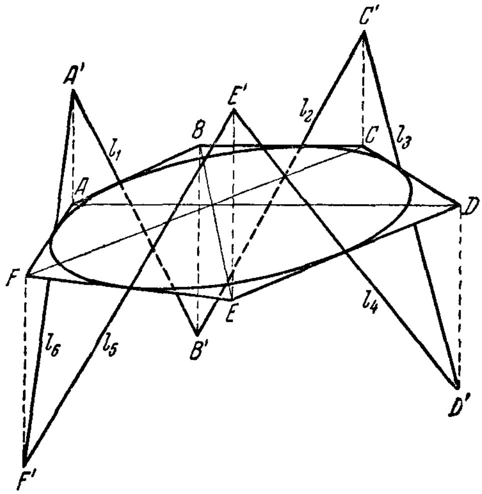


Черт. 274.

черт. 274, a); равенство понимается в смысле, оговоренном выше. Итак, диагональ AD есть геометрическое место таких точек N, что прямые XX' и YY', параллельные соответственно ad и fc, отсекают на сторонах AB и AF шестиугольника равные отрезки aX и fY. Точно так же доказывается, что диагональ BE есть геометрическое место таких точек K, что прямые XX' и ZZ', параллельные соответственно ad и bc, отсекают на сторонах AB и BC шестиугольника равные отрезки aX и bZ.

Пусть теперь Q есть точка пересечения AD и BE (черт. 274, $б$). Проведем через точку Q прямые $XX' \parallel ad$, $YY' \parallel cf$ и $ZZ' \parallel de$. Так как точка Q принадлежит диагонали AD, то $aX = fY$, а так как эта точка принадлежит диагонали BE, то $aX = bZ$. Следовательно, $fY = bZ$, откуда $fY = eZ'$. Таким образом, точка Q принадлежит геометрическому месту таких точек L, что прямые YY' и ZZ', параллельные соответственно cf и be, отсекают на сторонах AF и FE равные отрезки $fY = eZ'$. Но это геометрическое место совпадает, очевидно, с диагональю CF шестиугольника. Следовательно, точка пересечения AD и BE принадлежит диагонали CF, что и требовалось доказать.

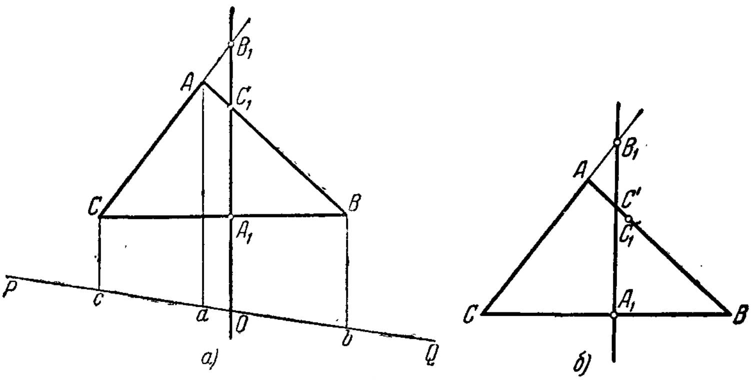
Второе решение. Приведем еще изящное решение задачи, основанное на стереометрических соображениях. Повернем каждую из прямых, на которых лежат стороны нашего



Черт. 275.

шестиугольника (четные в одну сторону, нечетные — в другую), на 45° вокруг радиуса, проведенного в точку касания (мы таким образом выведем каждую из этих прямых из плоскости шестиугольника), и обозначим полученные прямые через l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 (черт. 275). Как легко видеть, каждая прямая с нечетным номером пересекается в пространстве с каждой прямой с четным номером, так как они симметричны относительно плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа и проходящей через биссектрису угла между их проекциями. В частности, каждая прямая пересекается с соседней, т. е. прямые $l_1, l_2, \ldots, l_6$ образуют в пространстве шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$, проекцией которого на плоскость чертежа является исходный шестиугольник $ABCDEF$ (см. черт. 275). Прямые $A'D'$ и $B'E'$, соединяющие противоположные вершины пространственного шестиугольника, пересекаются, так как прямые $A'B' = l_1$ и $E'D' = l_4$ лежат в одной плоскости; аналогично пересекаются прямые $A'D'$ и $C'F'$ и прямые $B'E'$ и $C'F'$. Следовательно, три прямые $A'D'$, $B'E'$ и $C'F'$ пересекаются в пространстве в одной точке (так как они не лежат в одной плоскости), а потому пересекаются в одной точке и их проекции AD, BE и CF на плоскость чертежа.

131. Пусть стороны треугольника ABC пересекаются секущей $A_1C_1B_1$ (черт. 276, *а*). Проведем в плоскости треугольника произвольную прямую $PQ \nparallel B_1A_1$. Пусть она пересечет B_1A_1 в точке O. Спроектируем вершины треугольника ABC параллельно прямой B_1A_1 на прямую PQ; пусть при этом проекции вершин A, B, C будут соответственно точки a, b, c. Очевидно, имеем:



Черт. 276.

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{aO}{Ob}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{bO}{Oc}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{cO}{Oa};$$

перемножая эти равенства, получим

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{aO}{Ob}\cdot\frac{bO}{Oc}\cdot\frac{cO}{Oa}=-1.$$

Обратно, пусть имеет место равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$

Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. В самом деле, пусть прямая B_1A_1 пересекает прямую AB в некоторой точке C' (черт. 276, *б*). Тогда по доказанному выше

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1$$

и по условию

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$

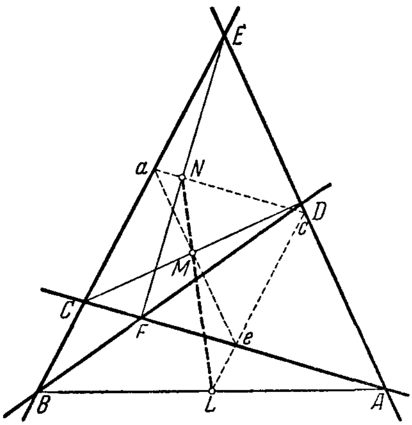
Приравнивая левые части последних двух равенств и сокращая, получим

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC_1}{C_1B},$$

$$\frac{AC'+C'B}{C'B}=\frac{AC_1+C_1B}{C_1B},$$

$$\frac{AB}{C'B}=\frac{AB}{C_1B},$$

т. е. точка C' совпадает с точкой C_1.



Черт. 277.

132. а) Пусть $ABCDEF$ — полный четырехсторонник, диагонали которого AB, CD, EF имеют середины в точках L, M и N (черт. 277). Рассмотрим треугольник ACE, образованный тремя сторонами четырехугольника, и пусть a, c, e — середины сторон CE, EA, AC. Прямая $ce \parallel CE$ и проходит через точку L; прямая $ae \parallel AE$ и проходит через точку M; прямая $ac \parallel AC$ и проходит через точку N. Чтобы доказать, что точки L, M, N лежат на одной прямой, достаточно проверить, что имеет место соотношение

$$\frac{aM}{Me}\cdot\frac{eL}{Lc}\cdot\frac{cN}{Na}=-1.$$

Но

$$\frac{aM}{Me}=\frac{ED}{DA}, \quad \frac{eL}{Lc}=\frac{CB}{BE}, \quad \frac{cN}{Na}=\frac{AF}{FC},$$

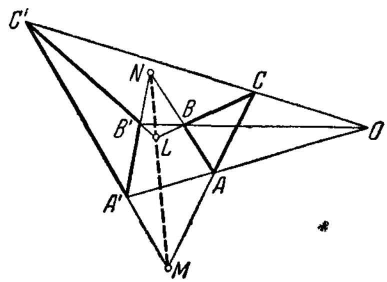
откуда

$$\frac{aM}{Me}\cdot\frac{eL}{Lc}\cdot\frac{cN}{Na}=\frac{ED}{DA}\cdot\frac{CB}{BE}\cdot\frac{AF}{FC}.$$

Но произведение, стоящее справа, равно -1, ибо точки D, B, F лежат на одной прямой, пересекающей стороны треугольника ACE. Отсюда и вытекает требуемое предложение.

б) Пусть ABC и $A'B'C'$ — два треугольника такие, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке O, и пусть L есть точка пересечения прямых BC и $B'C'$, M — точка пересечения прямых CA и $C'A'$, N — точка пересечения прямых AB и $A'B'$ (черт. 278). Докажем, что точки L, M, N лежат на одной прямой. Для этого достаточно показать, что имеет место равенство

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1.$$



Черт. 278.

Из рассмотрения треугольника OBC, пересеченного прямой $LB'C'$, имеем

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OB'}{BB'}=-1.$$

Аналогично из рассмотрения треугольников OCA и OAB, пересеченных прямыми $MA'C'$ и $NB'A'$, получаем

$$\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}=-1 \quad \text{и} \quad \frac{AN}{NB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OA'}{A'A}=-1.$$

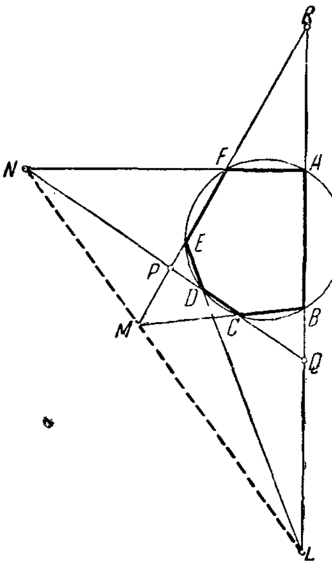
Перемножив почленно последние три равенства и сократив, получим

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1,$$

что и требовалось доказать.

в) Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, вписанный в окружность L, M, N — соответственно точки пересечения сторон AB и DE, BC и EF, CD и FA. Продолжим стороны AB, CD и EF до попарного пересечения в точках P, Q и R (черт. 279) и рассмотрим треугольник PQR. Для того чтобы доказать, что L, M, N лежат на одной прямой, достаточно установить, что имеет место равенство

$$\frac{QL}{LR}\cdot\frac{RM}{MP}\cdot\frac{PN}{NQ}=-1.$$



Черт. 279.

Но из рассмотрения треугольника PQR, пересеченного прямой LED, имеем

$$\frac{QL}{LR}\cdot\frac{RE}{EP}\cdot\frac{PD}{DQ}=-1;$$

аналогично из рассмотрения того же треугольника, пересеченного прямыми MCB и NFA, получаем

$$\frac{RM}{MP}\cdot\frac{PC}{CQ}\cdot\frac{QB}{BR}=-1$$

и

$$\frac{PN}{NQ}\cdot\frac{QA}{AR}\cdot\frac{RF}{FP}=-1.$$

Перемножив последние три равенства, получим

$$\frac{QL}{LR}\cdot\frac{RM}{MP}\cdot\frac{PN}{NQ}\cdot\frac{PC\cdot PD}{EP\cdot FP}\cdot\frac{QA\cdot QB}{CQ\cdot DQ}\cdot\frac{RE\cdot RF}{AR\cdot BR}=-1.$$

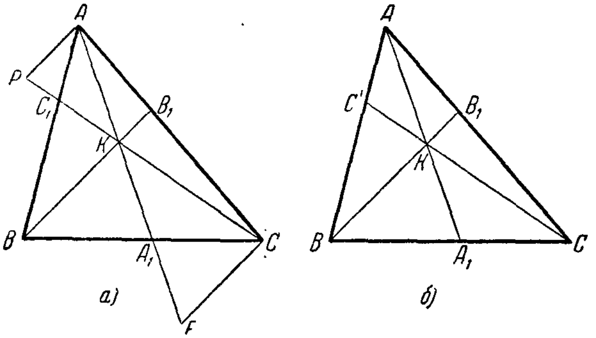
Но в силу известного свойства секущей к окружности

$$PC\cdot PD=EP\cdot FP,\quad QA\cdot QB=CQ\cdot DQ,\quad RE\cdot RF=AR\cdot BR,$$

т. е. каждая из последних трех дробей нашего произведения равна 1.

Таким образом, $\frac{QL}{LR}\cdot\frac{RM}{MP}\cdot\frac{PN}{NQ}=-1$, что и требовалось доказать.

133. Пусть ABC — произвольный треугольник и пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке K (черт. 280, *а*). Проведем через точки A и C прямые, парал-



Черт. 280.

лельные BB_1, до пересечения с CC_1 и AA_1 соответственно в точках P и F. Тогда

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{PK}{KC}.$$

Так как треугольники AKP и FKC подобны, то

$$\frac{PK}{KC}=\frac{AP}{CF},$$

и, следовательно,

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AP}{CF}.$$

Далее, треугольники CA_1F и BA_1K подобны; отсюда

$$\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CF}{KB}.$$

Наконец, из подобия треугольников AC_1P и BC_1K

$$\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BK}{PA}.$$

Перемножив почленно три последних равенства, получим

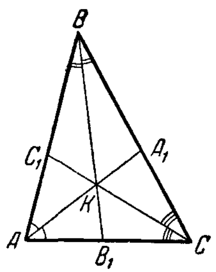
$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{AP}{CF}\cdot\frac{CF}{KB}\cdot\frac{BK}{PA}=1.$$

Предоставляем читателю самостоятельно рассмотреть случай параллельности трех прямых AA_1, BB_1, CC_1.

Докажем теперь, что и обратно: если имеет место равенство

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1,$$

то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или все параллельны. В самом деле, пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 не все параллельны; пусть, например, K есть точка пересечения прямых AA_1 и BB_1, а прямая CK пересекает прямую AB в точке C' (черт. 280, *б*). Тогда по предыдущему



Черт. 281.

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$$

и по условию

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

Приравнивая левые части и сокращая, получим $\frac{BC'}{C'A}=\frac{BC_1}{C_1A}$, откуда

$$\frac{BA}{C'A}=\frac{BA}{C_1A}.$$

Следовательно, C' совпадает с C_1.

134. а) Решение очевидно: если AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, то $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{BC_1}{C_1A}=1$.

б) Пусть AA_1, BB_1, CC_1—биссектрисы треугольника ABC (черт. 281). В силу известного свойства биссектрис треугольника

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{c}{a},\quad\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{b}{c},\quad\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{a}{b},$$

где a, b, c — стороны треугольника ABC. Отсюда

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}=1.$$

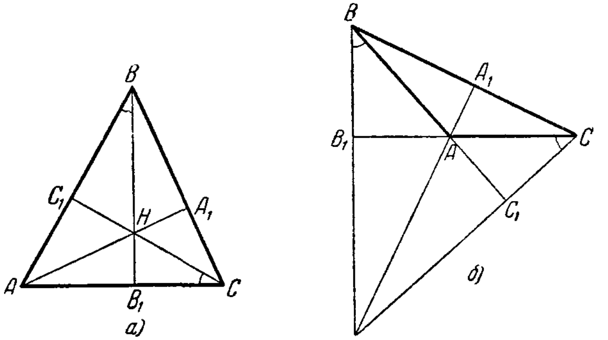
в) Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC (черт. 282, *а*, *б*). Из подобия треугольников CAC_1 и BAB_1 имеем

$$\frac{AC_1}{B_1A}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}.$$

Аналогично

$$\frac{BA_1}{C_1B}=\frac{c}{a},\quad \frac{CB_1}{A_1C}=\frac{a}{b}.$$

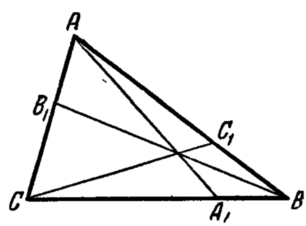
А так как знак произведения $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}$ положителен



Черт. 282.

(в зависимости от того, является ли треугольник остроугольным или тупоугольным, все три сомножителя положительны или два из них отрицательны, а третье положительно), то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{B_1A}\cdot\frac{BA_1}{C_1B}\cdot\frac{CB_1}{A_1C}=$$
$$=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1.$$



Черт. 283.

г) Пусть каждая из прямых AA_1, BB_1, CB (черт. 283) делит периметр $2p$ треугольника ABC пополам. Тогда

$$AB+BA_1=\frac{a+b+c}{2}=\frac{2p}{p}=p,\quad BA_1=p-c.$$

Аналогично

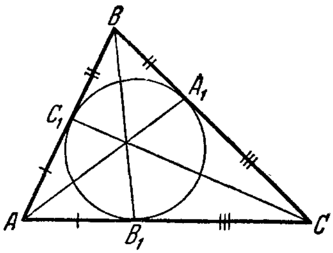
$$CA_1 = p - b,\ AB_1 = p - c,\ CB_1 = p - a,\ AC_1 = p - b,\ BC_1 = p - a.$$

Отсюда имеем

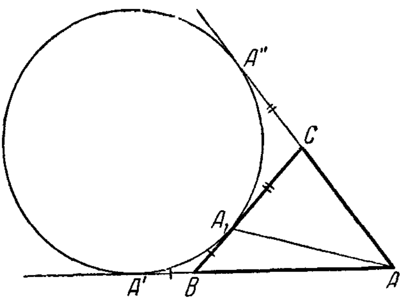
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{p-c}{p-a} \cdot \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-a}{p-b} = 1,$$

что и доказывает наше утверждение.

д) Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC соответственно в точках



Черт. 284.



Черт. 285.

A_1, B_1 и C_1 (черт. 284). В силу известного свойства касательных к окружности

$$AB_1 = AC_1,\ CB_1 = CA_1,\ BA_1 = BC_1;$$

отсюда (так как произведение $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A}$ положительно)

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

е) Пусть окружность, вневписанная в угол A треугольника ABC, касается его сторон BC, AB и AC соответственно в точках A_1, A' и A'' (черт. 285). В таком случае, очевидно,

$$BA' = BA_1,\ CA'' = CA_1,\ AA' = AA''.$$

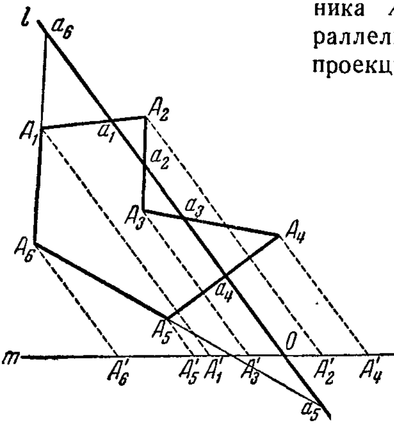
Отсюда имеем

$$AA' + AA'' = AB + AC + BA_1 + CA_1 = 2p;\quad AA' = AA'' = p,$$

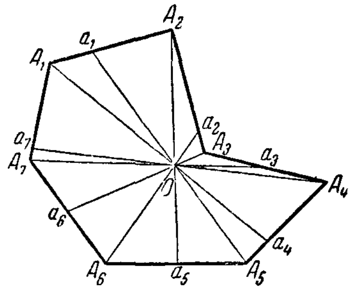
$$AB + BA_1 = AB + BA' = p,\quad AC + CA_1 = p.$$

Отсюда видно, что прямые, рассматриваемые в этой задаче, совпадают с теми, о которых говорится в задаче 134 г).

135. а). Пусть m — произвольная прямая, пересекающая l в точке O (черт. 286). Спроектируем вершины многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ на прямую m параллельно прямой l; пусть при этом проекциями вершин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будут точки $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$. Очевидно, имеем



Черт. 286.



Черт. 287.

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2}=\frac{A'O}{OA'_2}, \quad \frac{A_2a_2}{a_2A_3}=\frac{A'_2O}{OA'_3}, \ldots,$$

$$\frac{A_{n-1}a_{n-1}}{a_{n-1}A_n}=\frac{A'_{n-1}O}{OA'_n}, \quad \frac{A_na_n}{a_nA_1}=\frac{A'_nO}{OA'_1}.$$

Перемножая все эти равенства, получим

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2}\cdot\frac{A_2a_2}{a_2A_3}\cdots\frac{A_{n-1}a_{n-1}}{a_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_na_n}{a_nA_1}=$$

$$=\frac{A'_1O}{OA'_2}\cdot\frac{A'_2O}{OA'_3}\cdots\frac{A'_{n-1}O}{OA'_n}\cdot\frac{A'_nO}{OA'_1}=(-1)^n,$$

что и требовалось доказать.

б) Из рассмотрения площадей треугольников A_1Oa_1 и a_1OA_2 (черт. 287) имеем

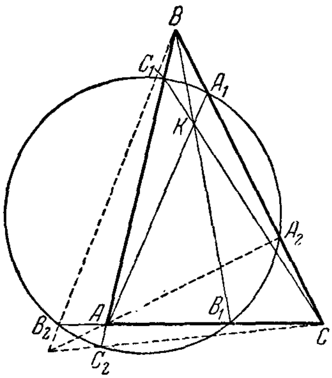
$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2}=\frac{OA_1\sin\angle A_1Oa_1}{OA_2\sin\angle a_1OA_2},$$

где, например, $\angle A_1Oa_1$ считаем положительным, если OA_1 надо повернуть до совмещения с Oa_1 против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае. Аналогично получаем

$$\frac{A_2a_2}{a_2A_3}=\frac{OA_2\sin\angle A_2Oa_2}{OA_3\sin\angle a_2OA_3},\quad \frac{A_3a_3}{a_3A_4}=\frac{OA_3\sin\angle A_3Oa_3}{OA_4\sin\angle a_3OA_4},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \frac{A_{2n-1}a_{2n-1}}{a_{2n-1}A_1}=\frac{OA_{2n-1}\sin\angle A_{2n-1}Oa_{2n-1}}{OA_1\sin\angle a_{2n-1}OA_1}.$$

Перемножив все эти равенства и учитывая при этом, что $\angle A_1Oa_1=\angle a_nOA_{n+1}, \angle A_2Oa_2=\angle a_{n+1}OA_{n+2}, \ldots$, получим:



Черт. 288.

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2}\cdot\frac{A_2a_2}{a_2A_3}\cdots\frac{A_{2n-1}a_{2n-1}}{a_{2n-1}A_1}=1,$$

что и требовалось доказать.

136. По теореме Чевы мы имеем

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Но в силу известного свойства окружности имеем

$$AB_1\cdot AB_2=AC_1\cdot AC_2,$$
$$BC_1\cdot BC_2=BA_1\cdot BA_2,$$
$$CA_1\cdot CA_2=CB_1\cdot CB_2$$

(черт. 288), откуда, произведя несложные алгебраические преобразования, получим

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

В силу теоремы Чевы отсюда вытекает, что и прямые AA_2, BB_2 и CC_2 также пересекаются в одной точке.

137. Проведем средние линии $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ треугольника ABC и пусть A_1', B_1', C_1' — точки пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 с соответствующими средними линиями треугольника (черт. 289). Тогда, очевидно,

$$\frac{B'A_1'}{A_1'C'}=\frac{CA_1}{A_1B},\quad \frac{C'B_1'}{B_1'A'}=\frac{AB_1}{B_1C},\quad \frac{A'C_1'}{C_1'B'}=\frac{BC_1}{C_1A}.$$

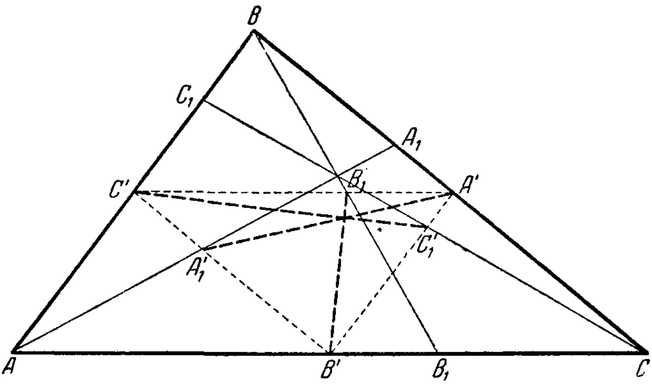
Но так как прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то в силу теоремы Чевы

$$\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}=1$$

и, следовательно,

$$\frac{B'A_1'}{A_1'C'}\cdot\frac{C'B_1'}{B_1'A'}\cdot\frac{A'B_1'}{C_1'B'}=1.$$

Последнее соотношение в силу теоремы Чевы означает, что прямые $A'A_1'$, $B'B_1'$ и $C'C_1'$, проведенные через вершины



Черт. 289.

A', B' и C' треугольника $A'B'C'$, пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

138. Имеем

$$AB_1=B_1'C,\quad B_1C=AB_1';$$

следовательно,

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{CB_1'}{B_1'A};$$

аналогично

$$\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{BA_1'}{A_1'C},\quad \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{AC_1'}{C_1'B}.$$

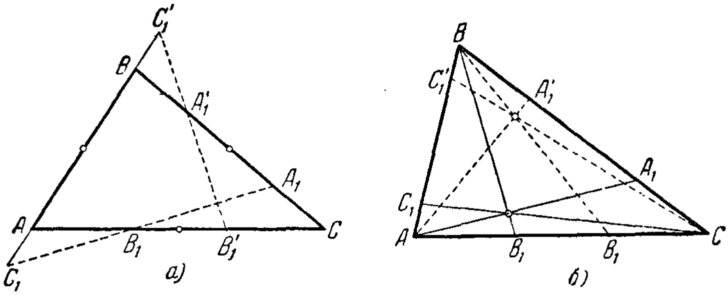
Теперь доказываемые предложения прямо вытекают из теоремы Менелая (задача 131) и из теоремы Чевы (задача 133). Действительно,

а) если $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = -1$ (черт. 290, *а*), то и

$$\frac{CB_1'}{B_1'A} \cdot \frac{AC_1'}{C_1'B} \cdot \frac{BA_1'}{A_1'C} = -1;$$

б) если $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ (черт. 290, *б*), то и

$$\frac{CB_1'}{B_1'A} \cdot \frac{AC_1'}{C_1'B} \cdot \frac{BA_1'}{A_1'C} = 1.$$

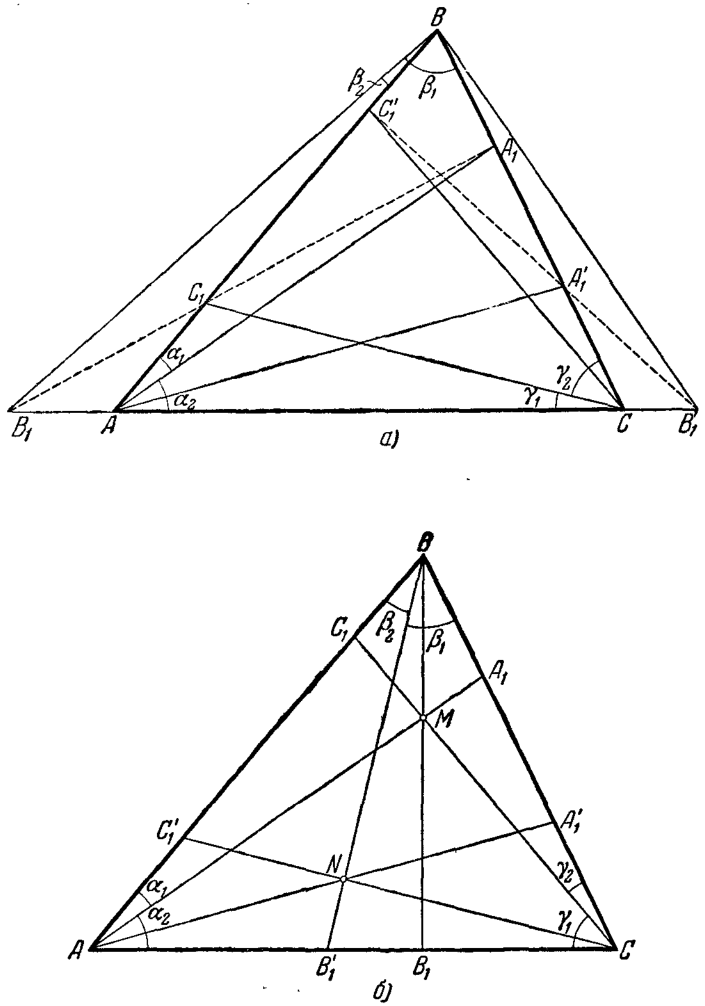


Черт. 290.

139. Пусть стороны BC, AC и AB треугольника ABC (черт. 291, *а*, *б*) равны соответственно a, b и c. Пусть прямая AA_1, проходящая через вершину A, образует со сторонами AB и AC треугольника соответственно углы α_1 и α_2. В таком случае, очевидно,

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle ACA_1}} = \frac{\frac{1}{2} cAA_1 \sin \alpha_1}{\frac{1}{2} bAA_1 \sin \alpha_2} = \frac{c \cdot \sin \alpha_1}{b \cdot \sin \alpha_2}.$$

Аналогично, если обозначить углы, образованные прямыми BB_1 и CC_1 соответственно со сторонами BC и BA, CA и CB,


B
β_2
β_1
C_1'
A_1
A_1'
C_1
α_1
α_2
γ_2
γ_1
B_1
A
C
B_1
а)
B
C_1
β_2
β_1
A_1
M
C_1'
A_1'
N
γ_2
α_1
α_2
γ_1
A
C
B_1'
B_1
б)

Черт. 291.

через β_1, β_2 и γ_1, γ_2, то мы будем иметь

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{a\sin\beta_1}{c\sin\beta_2},\quad \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{b\sin\gamma_1}{a\sin\gamma_2}.$$

Далее, так как прямая AA_1' симметрична прямой AA_1 относительно биссектрисы угла BAC, она образует со сторонами AB и AC углы α_2 и α_1 и, следовательно,

$$\frac{BA_1'}{A_1'C}=\frac{c\sin\alpha_2}{b\sin\alpha_1};$$

аналогично

$$\frac{CB_1'}{B_1'A}=\frac{a\sin\beta_2}{c\sin\beta_1},\quad \frac{AC_1'}{C_1'B}=\frac{b\sin\gamma_2}{a\sin\gamma_1}.$$

Отсюда в силу теорем Менелая и Чевы сразу следуют предложения задач а) и б). В самом деле, легко видеть, что

а) если $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=-1$, то и $\frac{BA_1'}{A_1'C}\cdot\frac{CB_1'}{B_1'A}\cdot\frac{AC_1'}{C_1'B}=-1$ (черт. 291, *а*);

б) если $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$, то и $\frac{BA_1'}{A_1'C}\cdot\frac{CB_1'}{B_1'A}\cdot\frac{AC_1'}{C_1'B}=1$ (черт. 291, *б*).

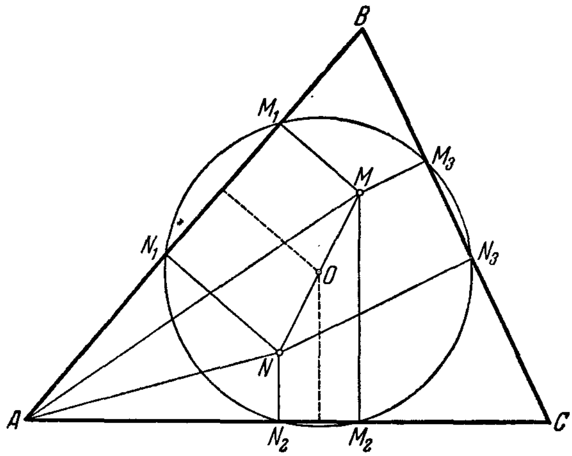
Действительно, равенство абсолютных величин произведений отношений

$$\frac{BA_1}{A_1C},\ \frac{CB_1}{B_1A},\ \frac{AC_1}{C_1B}\ \text{и}\ \frac{BA_1'}{A_1'C},\ \frac{CB_1'}{B_1'A},\ \frac{AC_1'}{C_1'B}$$

следует из полученных выше соотношений; совпадение знаков этих произведений следует из того, что, например, точка A_1' находится вне или внутри треугольника ABC одновременно с точкой A_1, т. е. знак отношения $\frac{BA_1'}{A_1'C}$ совпадает со знаком отношения $\frac{BA_1}{A_1C}$.

в) предложение задачи в) требует отдельного доказательства. Пусть $M_1M_2M_3$ и $N_1N_2N_3$ — проекции точек M и N на стороны треугольника ABC (черт. 292).

Из подобия треугольников AMM_1 и ANN_2 имеем $\frac{AM_1}{AN_2}=\frac{AM}{AN}$. Аналогично $\frac{AN_1}{AM_2}=\frac{AN}{AM}$, следовательно, $\frac{AM_1}{AN_2}=\frac{AM_2}{AN_1}$, т. е. $AM_1 \cdot AN_1 = AM_2 \cdot AN_2$. Но последнее соотношение означает, что точки M_1, N_1, M_2 и N_2 лежат на одной окружности. Центр этой окружности лежит на пересечении перпендикуляров, восставленных к сторонам AB

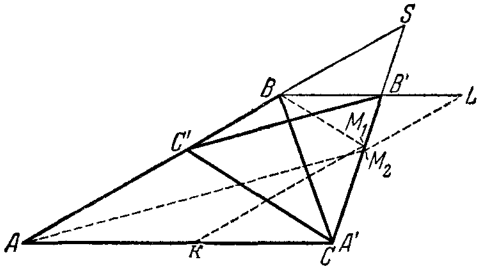


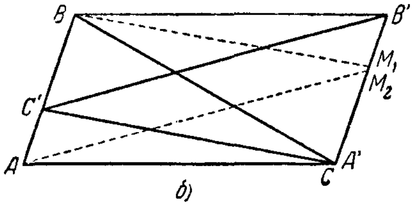
Черт. 292.

и AC треугольника из середин отрезков M_1N_1 и M_2N_2 и, следовательно, совпадает с серединой O отрезка MN. Точно так же доказывается, что точки M_1, N_1, N_3 и M_3 лежат на одной окружности с тем же центром O, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Легко доказать, что высоты треугольника симметричны относительно биссектрис соответствующих углов радиусам описанной окружности, проведенным в вершины треугольника. Отсюда и из теоремы настоящей задачи следует, что основания высот треугольника и три середины сторон лежат на одной окружности, центр которой находится в середине отрезка, соединяющего центр описанной окружности треугольника с точкой пересечения высот (см. выше задачу 99).

140. Докажем прежде всего требуемое предложение для какого-нибудь специального расположения треугольников ABC и $A'B'C'$ на плоскости. Будем считать, например, что вершина A' треугольника $A'B'C'$ совпадает с вершиной C треугольника ABC, а вершина C' расположена на стороне AB (черт. 293). В таком случае прямые, проведенные через вершины A' и C' треугольника $A'B'C'$ параллельно соответственно сторонам BC и AB треугольника ABC, совпадают





Черт. 293.

с самими этими сторонами, и для того чтобы условие задачи выполнялось, надо, чтобы прямая BB' была параллельна AC; в этом случае точкой пересечения прямых, проведенных через точки A', B' и C' параллельно соответственно прямым BC, CA и AB, является точка B. Требуется доказать, что в этом случае прямые, проведенные через точки A, B и C параллельно соответственно прямым $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$, пересекаются в одной точке. Но последняя из этих прямых совпадает со стороной $A'B'$ треугольника $A'B'C'$; таким образом, остается доказать, что прямые AM_2 и BM_1, проведенные через точки A и B параллельно соответственно прямым $B'C'$ и $A'C'$, пересекаются в точке M, лежащей на стороне $A'B'$ треугольника $A'B'C'$.

Предположим, что это не так, и обозначим точки пересечения со стороной $A'B'$ прямых, проведенных через A и B параллельно соответственно $B'C'$ и $A'C'$, через M_2 и M_1. Проведем через точки M_1 и M_2 прямые M_1K и M_2L, параллельные AB (K есть точка на прямой AC, L — точка на прямой BB'). Предположим сначала, что прямые AB и $A'B'$ непараллельны, и продолжим их до их пересечения в некоторой точке S (черт. 293, *а*). Докажем, что $SM_1 = SM_2$; тем самым будет доказано, что точки M_1 и M_2 совпадают. Рассматривая стороны угла ASC, пересеченные параллельными прямыми AM_2 и $C'B'$, получим

$$\frac{SM_2}{SB'} = \frac{SA}{SC'},$$

следовательно,

$$SM_2 = \frac{SB' \cdot SA}{SC'}.$$

Аналогично из параллельности прямых BM_1 и $C'C$ следует

$$SM_1 = \frac{SC \cdot SB}{SC'}.$$

Но из параллельности прямых BB' и AC вытекает

$$\frac{SB'}{SC} = \frac{SB}{SA} \quad \text{или} \quad SB' \cdot SA = SC \cdot SB.$$

Следовательно,

$$SM_2 = SM_1,$$

что и требовалось доказать.

Если же прямые AB и $A'B'$ параллельны (черт. 293, *б*), то

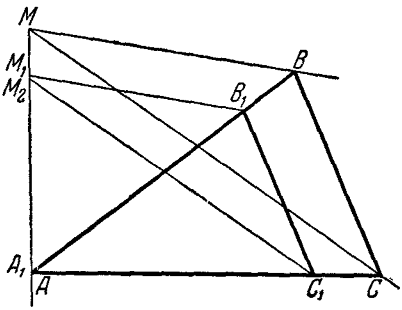
$$B'M_2 = AC', \quad B'M_1 = B'C - CM_1 = AB - C'B = AC';$$

следовательно,

$$B'M_2 = B'M_1,$$

так что и в этом случае точки M_1 и M_2 совпадают.

Таким образом, мы полностью доказали нашу теорему для указанного специального расположения треугольников ABC и $A'B'C'$. После этого уже легко убедиться, что теорема справедлива и в общем случае. Действительно, предположим, что какие-то три прямые, проведенные через вершины некоторого треугольника ABC, пересекаются в одной точке; в таком случае, как легко показать, прямые, параллельные первым, проведенные через вершины другого треугольника $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны сторонам треугольника ABC, тоже пересекаются в одной точке. Для того чтобы показать это, предположим, что две стороны треугольника $A_1B_1C_1$ совпадают с двумя сторонами треугольника ABC и лишь сторона B_1C_1 отлична от BC (причем $B_1C_1 \parallel BC$, черт. 294). Обозначим точку пересечения первых прямых через M и предположим, что прямые, проведенные через точки B_1 и C_1 параллельно прямым BM, соответственно CM, пересекают прямую AM в двух различных точках M_1 и M_2. Рассматривая стороны угла MAB, пересеченные параллельными прямыми BM и B_1M_1, получаем:



Черт. 294.

$$\frac{MM_1}{BB_1} = \frac{AM}{AB}, \quad MM_1 = \frac{AM}{AB} \cdot BB_1,$$

аналогично

$$MM_2 = \frac{AM}{AC} \cdot CC_1.$$

Но из рассмотрения сторон угла BAC, пересеченных параллельными прямыми BC и B_1C_1, следует

$$\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC},$$

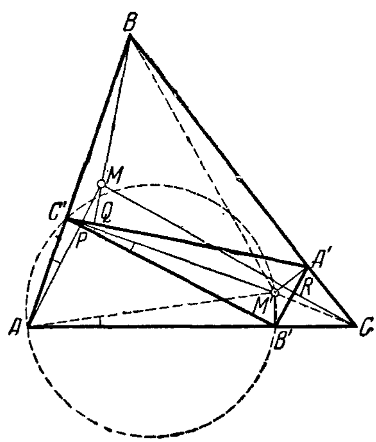
откуда вытекает, что

$$MM_1 = MM_2.$$

Таким образом, точка M_2 совпадает с точкой M_1, а это нам и требовалось доказать.

Теперь изменяя последовательно по одной стороне, мы можем перейти от треугольника ABC к любому другому треугольнику $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны сторонам треугольника ABC. Возвращаясь теперь к нашей задаче, мы можем перейти от треугольника $A'B'C'$, расположенного по отношению к треугольнику ABC так, как это имело место в рассмотренном нами частном случае теоремы, к произвольному другому треугольнику с теми же самыми направлениями сторон, что и доказывает справедливость теоремы в общем случае.

141. Доказательство этой теоремы аналогично решению задачи 140. А именно, докажем прежде всего нашу теорему для некоторого специального расположения треугольников ABC и $A'B'C'$. Предположим, что вершины треугольника $A'B'C'$ лежат на сторонах (или на продолжениях сторон) треугольника ABC (черт. 295). Пусть перпендикуляры, восставленные из точек A', B' и C' соответственно к прямым BC, AC и AB, пересекаются в одной точке M'; требуется доказать, что перпендикуляры AP, BQ и CR, опущенные из точек A, B и C соответственно на прямые $B'C'$, $A'C'$ и $A'B'$, тоже пересекаются в одной точке M.



Черт. 295.

Соединим точку M' с вершинами треугольника ABC. Так как четырехугольник $AB'M'C'$ можно, очевидно, вписать в окружность, то $\angle M'AB' = \angle M'C'B'$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Но $\angle M'C'B' = \angle C'AP$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами); следовательно, имеем

$$\angle M'AC = \angle BAP.$$

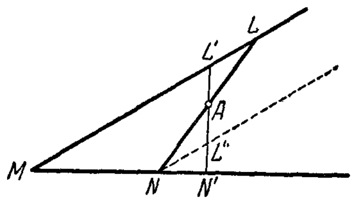
Точно так же доказывается, что

$$\angle M'BA = \angle CBQ, \quad \angle M'CB = \angle ACR.$$

Теперь нам остается только воспользоваться теоремой задачи 139 б), из которой вытекает, что прямые AP, BQ и CR пересекаются в одной точке.

Переход от этого частного случая к общему случаю дословно совпадает с заключительной частью решения задачи 140.

142. Пусть $AL=AN$ (черт. 296)[1]). Докажем, что треугольник LMN имеет наименьшую площадь. Проведем через точку A какую-либо другую прямую; пусть, например, она пересекает ML в точке L' и продолжение MN — в точке N'. Тогда $L'A<AN'$, ибо проведенная через N прямая, параллельная ML, пересечет отрезок AN' в точке L'' такой, что $L'A=AL''$. Из равенства треугольников ANL'' и ALL' вытекает



Черт. 296.

$$S_{\triangle MN'L'}=S_{MNAL'}+S_{\triangle ANL''}+S_{\triangle NN'L''}>$$
$$>S_{MNAL'}+S_{\triangle AL'L}=S_{\triangle MNL},$$

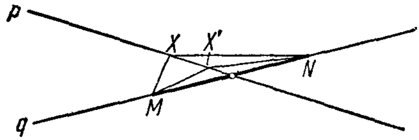
что и требовалось доказать.

143. а) Обозначим прямую, на которой лежит отрезок MN, через q. Пусть прямые p и q *пересекаются*. Тогда возможны три случая.

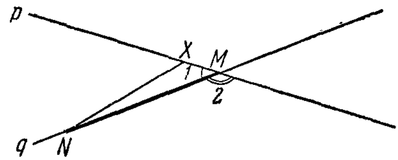
1° *Точка пересечения прямых p и q лежит внутри отрезка MN.* Тогда, чем ближе находится точка X прямой p к точке пересечения прямых p и q, тем больше делается угол MXN (черт. 297). Наибольшее свое значение он примет, когда его вершина X совпадет с точкой пересечения p и q. Тогда треугольник MXN выродится в отрезок и угол MXN станет равным 180°.

[1]) Нетрудно провести через данную точку A внутри угла такую прямую l, что отрезок ее внутри угла делится в точке A пополам. Для этого, например, достаточно отложить $AL''=AL'$ (см. черт. 296) и провести через L'' прямую $L''N \parallel L'M$.

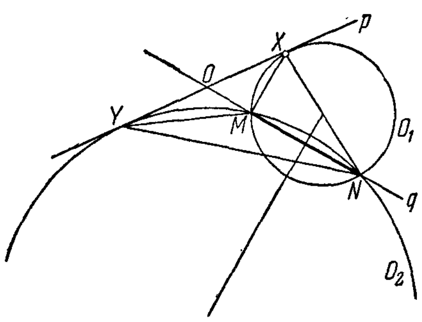
2° Точка пересечения прямых p и q совпадает с одним из концов отрезка MN, например с точкой M (черт. 298). Обозначим через $\angle 1$ и $\angle 2$ соответственно острый и тупой углы между прямыми p и q (так что $\angle 1 + \angle 2 = 180°$). При приближении точки X к точке M угол MNX стремится к нулю. Поэтому угол MXN все время увеличивается и стремится к углу $180° - \angle 1 = \angle 2$, если X приближается к M со стороны острого угла, или к углу $180° - \angle 2 = \angle 1$, если X приближается к M со стороны тупого угла. Действительно, в первом случае $\angle MXN = 180° - \angle 1 - \angle MNX$, а во втором $\angle MXN = 180° - \angle 2 - \angle MNX$. Однако, когда точка X совпадет с N, угол NXM вовсе не существует. Поэтому в этом случае задача не имеет решения.



Черт. 297.



Черт. 298.



Черт. 299.

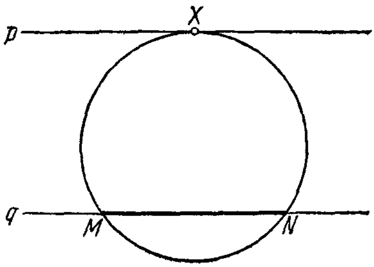
3° Точка O пересечения прямых p и q лежит вне отрезка MN (черт. 299). Проведем через точки M и N окружность, касающуюся прямой p. Таких окружностей будет две (точки X и Y касания этих окружностей с прямой p определяются из равенства $OM \cdot ON = OX^2 = OY^2$). Обозначим эти окружности через O_1 и O_2. Так как все точки луча OX, кроме X, лежат вне окружности O_1, то из точки X отрезок MN виден под бóльшим углом, чем из всех других точек луча OX;

точно так же из точки Y отрезок MN виден под бо́льшим углом, чем из других точек луча OY.

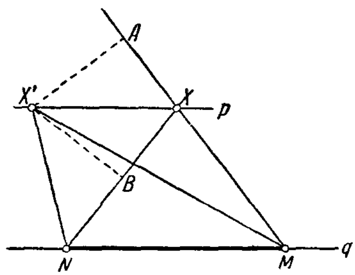
Сравним теперь между собой углы MYN и MXN. Пусть радиус окружности O_2 больше чем радиус окружности O_1; тогда $\angle MO_1N > \angle MO_2N$ (здесь O_1 и O_2 — центры окружностей). Но $\angle MYN = \frac{1}{2}\angle MO_2N$ и $\angle MXN = \frac{1}{2}\angle MO_1N$. Следовательно, $\angle MXN > \angle MY'N$.

Отсюда следует, что искомой точкой будет точка касания окружности меньшего радиуса с прямой p.

Аналогично решается задача в том случае, когда прямые p и q параллельны (черт. 300); только в этом случае существует единственная окружность, проходящая через точки M и N и касающаяся p.



Черт. 300.



Черт. 301.

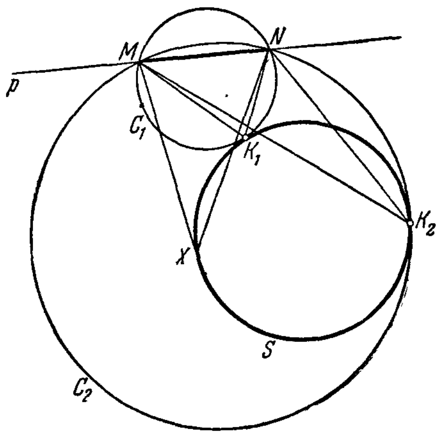
Для того случая, когда $p \parallel q$, дадим еще другое решение. Докажем, что точкой, из которой отрезок MN виден под наибольшим углом, будет такая точка прямой p, что треугольник MXN — равнобедренный (черт. 301). Пусть X — такая точка, а X' — любая другая точка прямой p. Докажем, что угол MXN больше угла $MX'N$. Треугольники $MX'X$ и $NX'X$ имеют равные площади, так как у них есть общее основание XX' и высоты, опущенные на XX', равны. Сторона MX одного треугольника равна стороне NX другого. Следовательно, высоты $X'A$ и $X'B$, опущенные на эти стороны, равны между собой. Пусть $MX' > NX'$; тогда угол XMX' треугольника $X'MA$ меньше угла XNX' треугольника $X'NB$. Следовательно,

$$\angle XMN + \angle MNX < \angle X'MN + \angle MNX',$$

а потому $\angle MXN > \angle MX'N$, что и требовалось доказать.

б) Обозначим прямую, на которой лежит отрезок MN, через p и рассмотрим возможные случаи.

1° Прямая p не пересекает окружности S (черт. 302). В этом случае можно провести две окружности C_1 и C_2, проходящие через M и N и касающиеся S соответственно внешне и внутренне (см. решение задачи 77 б)). Обозначим точки касания этих окружностей с S через K_1 и K_2



Черт. 302.

(черт. 302). В таком случае, если X есть какая угодно отличная от K_1 точка окружности S, то

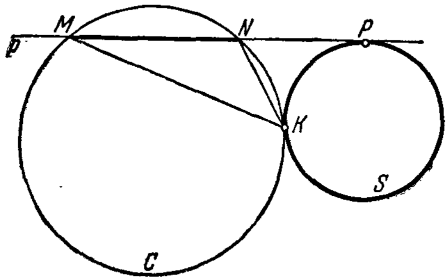
$$\angle MXN < \angle MK_1N$$

(угол MK_1N — вписанный и опирающийся на дугу MN окружности C_1, а MXN — угол с вершиной вне круга, опирающийся на ту же дугу). Аналогично, если точка X отлична от K_2,

$$\angle MXN > \angle MK_2N.$$

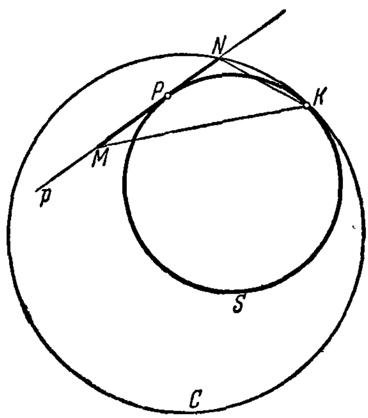
2° Прямая p касается S и точка касания P лежит вне MN (черт. 303). В этом случае существует единственная окружность C, проходящая через M и N и касающаяся S (внешне). Из точки K касания этой окружности с S отрезок MN виден под наибольшим возможным углом;

под наименьшим возможным углом (нулевым) этот отрезок виден из точки P.



Черт. 303.

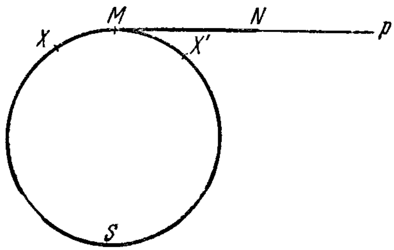
3° Прямая p касается S и точка касания P лежит внутри отрезка MN (черт. 304). В этом случае тоже существует единственная окружность C, проходящая



Черт. 304.

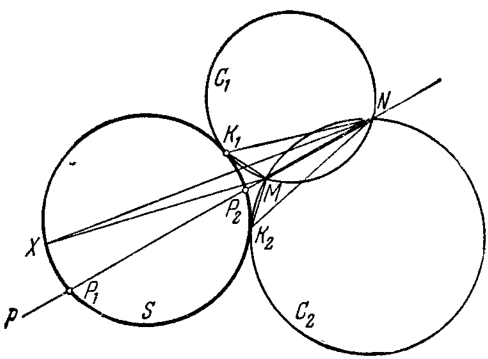
через M и N и касающаяся S (внутренне). Из точки K касания этой окружности с S отрезок MN виден под наименьшим возможным углом; под наибольшим возможным углом (равным 180°) этот отрезок виден из точки P.

4° Прямая p касается S в точке M (черт. 305). Угол MXN, где X — точка окружности S, стремится к нулю, если точка X приближается к M с одной стороны окружности, и к 180° — когда X приближается к M с другой сто-



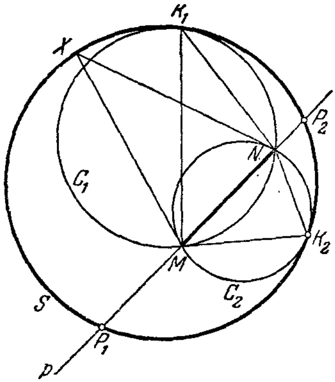
Черт. 305.

роны окружности. Однако, когда точка X совпадает с M, угол MXN не существует, поэтому в этом случае задача не имеет решения.



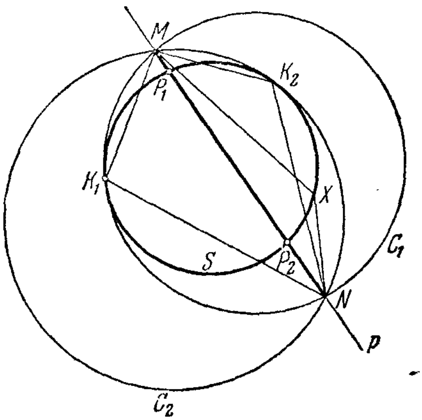
Черт. 306.

5° Прямая p пересекает окружность S в точках P_1 и P_2, лежащих вне отрезка MN. В этом случае существуют две окружности C_1 и C_2, проходящие через M и N и касающиеся S обе внешне (черт. 306) или обе внутренне (черт. 307). Если K_1 и K_2 — точки касания, то, как легко видеть, $\angle MXN$, где X — точка окружности, не превосходит по крайней мере одного из углов MK_1N, MK_2N, а именно, того, который отвечает точке касания, лежащей по ту же сторону p, что и X. Поэтому отрезок MN будет виден под наибольшим возможным углом либо из точки K_1, либо из точки K_2 (в зависимости от того, какой из углов MK_1N и MK_2N больше), либо из обеих точек K_1 и K_2 (если $\angle MK_1N = \angle MK_2N$). Под наименьшим возможным углом (нулевым) отрезок виден из точек P_1 и P_2 пересечения p с S.



Черт. 307.

6° Отрезок MN пересекает окружность S в двух точках P_1 и P_2, отличных от точек M и N (черт. 308). В этом случае тоже существуют две окружности, проходящие через точки M и N и касающиеся S в точках K_1 и K_2 (обе внутренне). В этом случае $\angle MXN$, где X — произвольная точка окружности S, будет не меньше, чем по крайней мере один из углов MK_1N, MK_2N (а именно, тот, который отвечает точке касания, лежащей с той же стороны p, что и X).

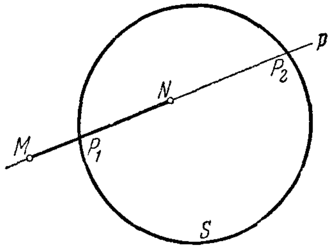


Черт. 308.

Поэтому отрезок MN будет виден под наименьшим углом из одной из двух точек K_1, K_2 (или из обеих, если

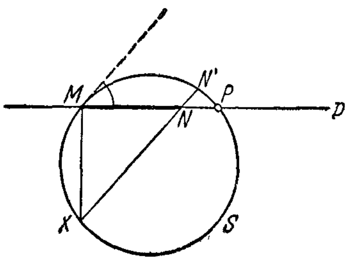
$\angle MK_1N = \angle MK_2N$). Под наибольшим возможным углом (180°) отрезок MN будет виден из точек P_1 и P_2.

7° Отрезок MN пересекает окружность в одной точке, отличной от M и N (черт. 309). В этом случае отрезок MN будет виден под наибольшим возможным углом (в 180°) из точки его пересечения с окружностью S и под наименьшим возможным углом (нулевым) из второй точки пересечения прямой p с S.

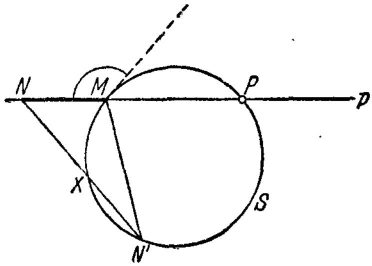


Черт. 309.

8° Прямая p пересекает окружность S в точке M и вторая точка P пересечения p с S лежит вне отрезка MN (черт. 310, 311). Отрезок MN виден под наименьшим углом (нулевым) из точки P. Далее, если X отлично от M, то $\angle MXN$, измеряющийся половиной дуги MN' (черт. 310, 311),



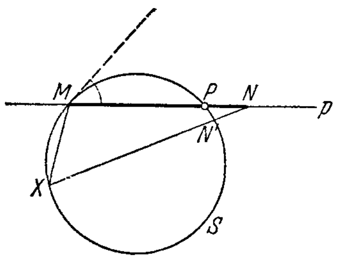
Черт. 310.



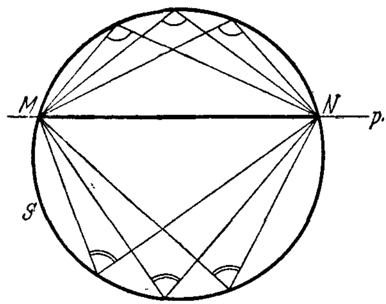
Черт. 311.

меньше угла между NM и касательной к окружности в точке M, измеряющегося половиной дуги $MN'P$; если X неограниченно приближается к M, то $\angle MXN$ стремится к этому углу. Однако если X совпадает с M, то угол MXN не существует; таким образом, в этом случае на окружности нет точки, из которой отрезок MN виден под наибольшим углом.

9° Прямая p пересекает окружность S в точке M и вторая точка P пересечения p с S лежит внутри MN (черт. 312). Отрезок MN виден под наибольшим углом (равным 180°) из точки P. Далее, если X есть отличная от M точка окружности S, то $\angle MXN$ (измеряющийся дугой $M'N'$; см. черт. 312) больше угла между p и касательной к окружности S в точке M; если X неограниченно приближается к M, то $\angle MXN$ стремится к этому углу. Однако если X совпадает с M, то угол MXN не существует; таким образом, в этом случае на окружности S нет точки, из которой отрезок MN виден под наименьшим углом.



Черт. 312.



Черт. 313.

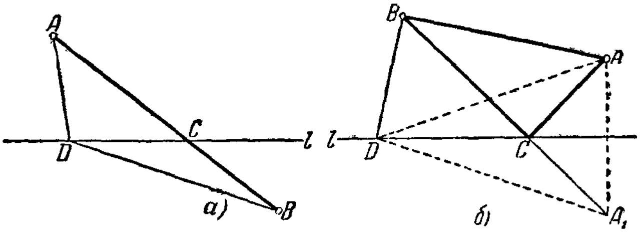
10° Наконец, если точки M и N обе лежат на окружности S (черт. 313), то угол MXN, где X — точка окружности, может иметь только два значения, зависящие от того, с какой стороны от p расположена точка X. Поэтому в этом случае отрезок MN виден под наибольшим возможным углом из всех точек одной дуги MN окружности S и под наименьшим возможным углом — из всех точек второй дуги. Особо следует отметить случай, когда MN есть диаметр S; в этом случае отрезок MN виден из всех точек окружности S под одним единственным углом (равным 90°).

144. а) Рассмотрим следующие случаи:

1° Вершины A и B лежат по разные стороны прямой l (черт. 314, a). Пусть C — точка пересечения отрезка AB с прямой l, а D — любая точка прямой l, отличная от C. Так как $AD+DB>AB$, то периметр треугольника ADB

$$AB+AD+DB>2AB.$$

С другой стороны очевидно, что если точку D брать достаточно близко к C, то периметр треугольника ADB можно сделать как угодно близким к удвоенной длине отрезка AB.



Черт. 314.

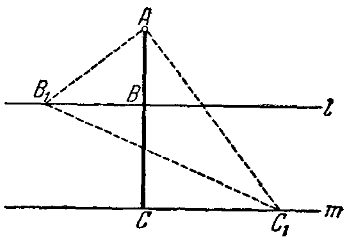
Отсюда вытекает, что в этом случае треугольник наименьшего периметра вырождается в «треугольник» ABC, т. е. в дважды взятый отрезок AB; периметр этого «треугольника» равен $2AB$:

$$AB+BC+AC=AB+AB=2AB.$$

2° Точки A и B лежат по одну сторону прямой l (черт. 314, *б*). Пусть точка A_1 симметрична точке A относительно прямой l, а D — произвольная точка прямой l. Тогда периметр треугольника ADB

$$AB+AD+BD=AB+A_1D+DB,$$

ибо $AD=A_1D$. Так как сумма A_1D+DB будет наименьшей в том случае, если D совпадает с точкой C пересечения отрезка A_1B с прямой l, то искомым треугольником с наименьшим периметром будет треугольник ACB.



Черт. 315.

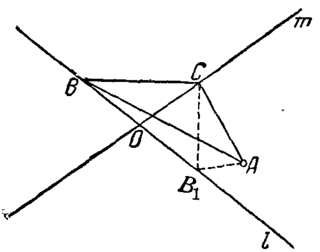
б) Рассмотрим следующие случаи:

1° Прямые l и m параллельны (черт. 315). Опустим из A перпендикуляр на эти прямые; пусть B и C — точки пересечения этого перпендикуляра с прямыми l и m, а B_1 и C_1 — любые другие две точки, расположенные соответственно на l и m. Тогда, очевидно, $AB_1 > AB$, $AC_1 > AC$ и $B_1C_1 > BC$. Следовательно, $AB + BC + AC < AB_1 + B_1C_1 + AC_1$. Поэтому искомый треугольник вырождается в дважды взятый отрезок ABC.

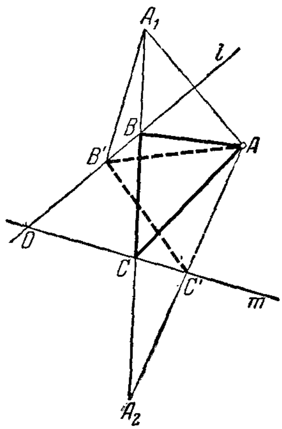
2° Прямые l и m пересекаются.

А. Рассмотрим сначала тот случай, когда вершина A лежит внутри острого угла, образованного этими прямыми (черт. 316). Пусть ABC — какой-нибудь треугольник, вершины которого B и C лежат соответственно на прямых l и m, и пусть O — точка пересечения прямых l и m. Если хотя бы одна из вершин, например B, лежит не на луче, ограничивающем угол, содержащий точку A, то такой треугольник можно заменить треугольником AB_1C, имеющим меньший периметр и таким, у которого вершина B_1 лежит на втором луче прямой l (если $OB_1 = OB$, то $CB_1 < CB$, $AB_1 < AB$).

Пусть теперь $AB'C'$ — произвольный треугольник, вершины которого B' и C' лежат на



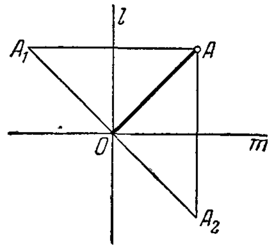
Черт. 316.



Черт. 317.

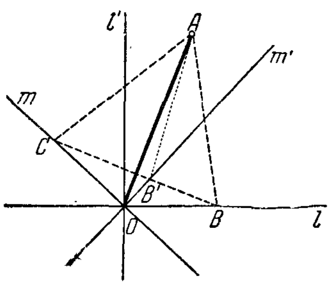
лучах Ol и Om таких, что точка A лежит внутри угла lOm (по предположению — острого). Обозначим точки, симметричные точке A относительно прямых l и m, соответственно через A_1 и A_2 (черт. 317). Периметр треугольника $AB'C'$ равен длине ломаной $A_1B'C'A_2$, ибо $A_1B' = B'A$ и $A_2C' = AC'$. Но эта ломаная будет наименьшей в том случае, если она будет отрезком, соединяющим точки A_1 и A_2. Таким образом, вершины B и C искомого треугольника наименьшего периметра лежат на пересечении отрезка A_1A_2 с прямыми l и m.

Б. Прямые l и m взаимно перпендикулярны. Тогда отрезок A_1A_2 (см. случай А) проходит через точку O (черт. 318). Точки B и C пересечения отрезка A_1A_2 с l и m совпадают между собой и с точкой O. Треугольник ABC с наименьшим периметром вырождается в «треугольник» AO с двумя совпавшими вершинами.

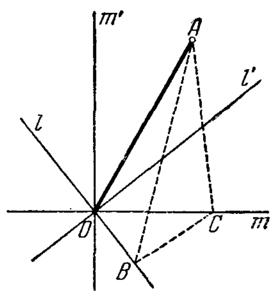


Черт. 318.

В. Точка A лежит внутри тупого угла, образованного прямыми l и m. Проведем через точку O прямую l', перпендикулярную к l, и прямую m', перпендикулярную к m. Пусть A лежит внутри угла $m'Ol'$ (черт. 319). Тогда искомым треугольником будет дважды взятый отрезок AO (вершины B и C треугольника совпадают с точкой O). Для доказательства рассмотрим произвольный треугольник, вершины B и C которого лежат на l и m.



Черт. 319.



Черт. 320.

Тогда, если B и C лежат соответственно на лучах Ol и Om (как на черт. 319) и B' — точка пересечения отрезка CB с прямой m', то

$$AB+BC+AC=AB+BB'+B'C+AC>$$
$$>AB'+B'C+AC>2AO$$

(см. случай Б). Если же хотя бы одна вершина, например B, не лежит на луче Ol (черт. 320), то $AB>AO$ (так как в треугольнике AOB угол O тупой) и

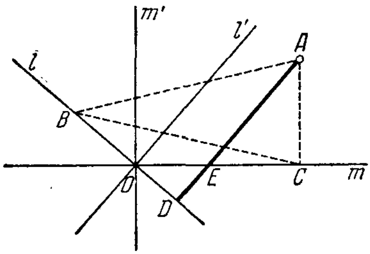
$$AB+BC+AC>2AB>2AO.$$

Пусть, наконец, точка A не лежит внутри угла $l'Om'$; например, A лежит внутри угла $l'Om$ (черт. 321). Опустим из A перпендикуляр на l; пусть D и E — точки пересечения этого перпендикуляра соответственно с прямыми l и m. Тогда для любого треугольника ABC будем иметь

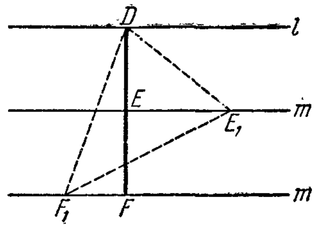
$$AC+CB+AB>2AB>2AD=AD+DE+AE;$$

следовательно, искомым треугольником будет служить дважды взятый отрезок AED.

Таким образом, когда точка A лежит внутри тупого угла, образованного прямыми l и m, то треугольником с наименьшим

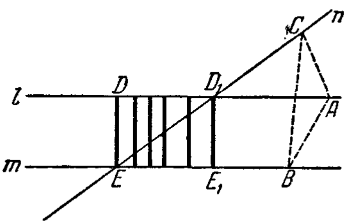


Черт. 321.



Черт. 322.

периметром будет или дважды взятый отрезок AO, или дважды взятый перпендикуляр, опущенный из A на l, или дважды взятый перпендикуляр, опущенный из A на m (в зависимости от того, в каком из трех углов lOm', $m'Ol'$ и $l'Om$ лежит точка A).



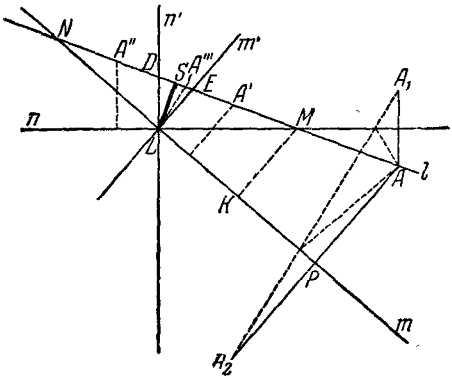
Черт. 323.

в) Рассмотрим следующие случаи:

1° Все три прямые параллельны между собой (черт. 322). В этом случае искомым треугольником будет, очевидно, общий перпендикуляр DEF этих трех прямых. Задача имеет бесчисленное множество решений.

2° l параллельно m; n пересекает l и m соответственно в точках D_1 и E (черт. 323). Решений будет бесчисленное множество, а именно, таковыми будут дважды взятый перпендикуляр DE к прямым l и m, дважды взятый перпендикуляр D_1E_1 к прямым l и m и любой дважды взятый перпендикуляр к l и m, заключенный между DE и D_1E_1 (ибо $AC+CB+AB>2AB>2DE$).

3° Прямые l, m и n пересекаются и образуют тупоугольный треугольник LMN, угол L тупой (черт. 324). Каждой точке A прямой l соответствует определенный треугольник, имеющий наименьший периметр среди всех треугольников с одной из вершин в A и двумя другими

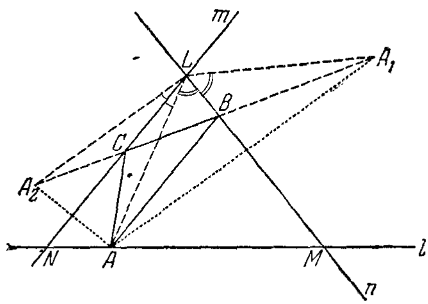


Черт. 324.

на прямых m и n (см. задачу 144 б)). Если теперь выбрать треугольник наименьшего периметра среди всех треугольников, соответствующих разным точкам A прямой l, то этот треугольник, очевидно, и будет искомым. Если A лежит вне отрезка MN, то периметр минимального треугольника, соответствующего точке A, равен A_1A_2 (см. черт. 324) и больше AA_2; далее, $AA_2=2AP>2MK$, где MK есть перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую $NL=m$, т. е. $A_1A_2>2MK$. Так как дважды взятый отрезок MK есть вырожденный треугольник с вершинами на прямых l, m, n, то точка, лежащая вне отрезка MN, не может быть вершиной искомого треугольника. Пусть, далее, прямые m' и n', проведенные через точку L перпендикулярно соответственно к m и n, пересекают отрезок MN в точках E и D. Минимальным треугольником, соответствующим точке A' отрезка ME, будет являться дважды взятый перпендикуляр, опущенный из точки A' на прямую m; наименьшим из таких перпендикуляров является EL. Минимальным треугольником, соответствующим точке A'' отрезка DN, будет дважды взятый перпендикуляр, опущенный из точки A'' на прямую n; наименьшим из таких перпендикуляров будет DL. Наконец, точке A''' отрезка DE в качестве наименьшего треугольника будет соответствовать дважды взятый отрезок $A'''L$; наименьшим из таких отрезков будет высота SL треугольника NLM. Но и DL и EL, очевидно, больше высоты SL. Следовательно, искомым треугольником будет дважды взятая высота LS, опущенная из вершины тупого угла треугольника LMN.

4° Прямые l, m, n пересекаются и образуют остроугольный треугольник MLN (черт. 325).

Найдем сначала, какой из треугольников, вписанных в треугольник MLN (т. е. таких, у которых вершины лежат на сторонах треугольника MLN), имеет наименьший периметр.



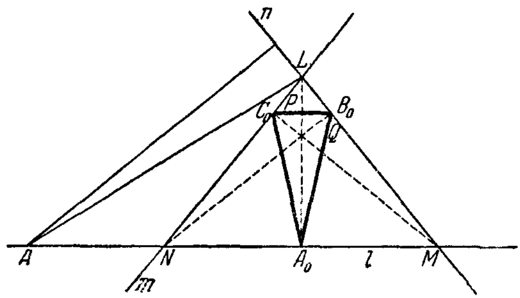
Черт. 325.

Если A лежит на стороне MN, то треугольником наименьшего периметра для нее будет треугольник ABC, где B и C — пересечения отрезка A_1A_2 (точки A_1 и A_2 симметричны точке A относительно LM и соответственно LN) со сторонами ML и LN. Периметр этого треугольника равен величине отрезка A_1A_2. Найдем то положение точки A на отрезке MN, для которого отрезок A_1A_2 будет наименьшим. Треугольник A_1LA_2 равнобедренный, так как

$$A_1L = LA \text{ и } A_2L = LA.$$

Угол при его вершине не зависит от положения точки A и равен $2\angle NLM$, так как $\angle A_2LN = \angle ALN$ и $\angle A_1LM = \angle ALM$. Но из двух равнобедренных треугольников с одним углом при вершине, очевидно, тот имеет меньшее основание, у которого боковая сторона меньше. А так как боковые стороны A_1L и A_2L треугольника равны в данном случае LA, то A_1A_2 будет наименьшим в том случае, когда LA наименьший, т. е. LA есть высота треугольника LMN. Таким образом, из всех вписанных треугольников наименьший периметр будет иметь треугольник $A_0B_0C_0$, где A_0 — основание высоты A_0B_0.

Покажем теперь, что найденный треугольник будет иметь наименьший периметр из всех треугольников, вершины которых лежат на прямых l, m, n. Для этого нам остается сравнить его

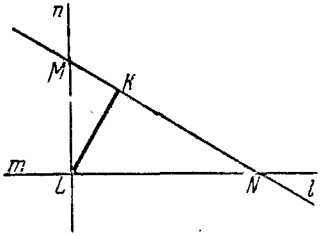


Черт. 326.

периметр с периметром минимального треугольника, построенного для произвольной точки A, лежащей вне отрезка MN (черт. 326). Если A лежит вне отрезка MN слева от точки N, то минимальным треугольником для нее будет или дважды взятый отрезок LA, или дважды взятый перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую LM. Но LA больше высоты LA_0 треугольника ABC, а перпендикуляр, опущенный на ML из какой-либо точки, лежащей вне отрезка MN слева от N, больше чем высота NQ.

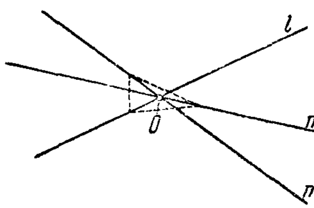
Аналогично периметры минимальных треугольников, соответствующих точкам прямой l, лежащим справа от точки M, больше одной из высот LA_0 или MP треугольника LMN, взятой дважды. Но каждая высота (взятая дважды) есть вырожденный вписанный треугольник. А из всех вписанных треугольников наименьший периметр имеет треугольник $A_0B_0C_0$.

Так как $A_0B_0C_0$ есть вписанный треугольник с наименьшим периметром, то отсюда следует, что B_0N и C_0M также высоты, так как мы могли начинать рассуждение не со стороны MN, а со стороны ML или LN и получить отсюда, что для треугольника $A_0B_0C_0$ наименьшего периметра точка B_0 есть основание высоты и точка C_0 — основание высоты. Таким образом, в рассматриваемом случае искомым треугольником наименьшего периметра будет треугольник, соединяющий основания высот треугольника LMN.



Черт. 327.

5° Прямые l, m и n, пересекаясь, образуют прямоугольный треугольник LMN, $\angle L = 90°$ (черт. 327). Если мы будем рассматривать треугольник LMN как предельный случай тупоугольного треугольника, то получим, что искомым треугольником наименьшего периметра будет взятая дважды высота LK, опущенная из вершины прямого угла.

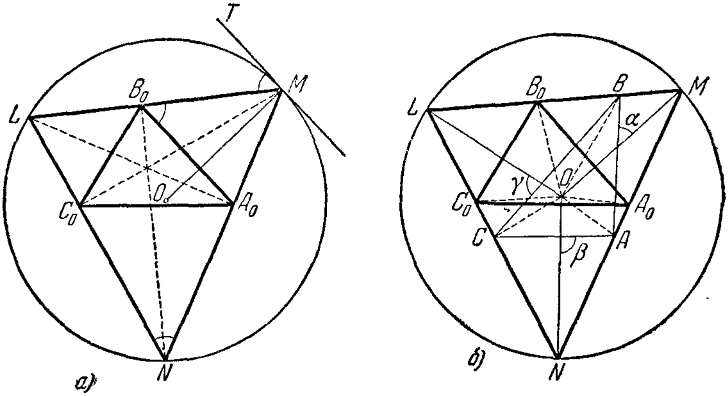


Черт. 328.

Тот же результат мы получим, если будем рассматривать треугольник LMN как предельный случай остроугольного треугольника.

6° Прямые l, m и n проходят через одну точку O (черт. 328). В этом случае искомый треугольник наименьшего периметра, очевидно, вырождается в одну точку O: «треугольник» нулевого периметра.

Примечание 1. Наметим коротко еще одно доказательство того, что из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник MLN, наименьший периметр будет иметь треугольник $A_0B_0C_0$, соединяющий основания высот MNL. Пусть O — центр



Черт. 329.

окружности, описанной около треугольника MNL, MT — касательная к этой окружности в точке M (черт. 329, *а*). Тогда

$$\angle LMT = \angle LNM,$$

так как оба угла измеряются половиной дуги LM. С другой стороны, из подобия прямоугольных треугольников LMA_0 и B_0MN получим

$$\frac{ML}{MN} = \frac{MA_0}{MB_0},$$

откуда следует, что треугольник LMN подобен треугольнику MA_0B_0, т. е. мы получаем

$$\angle LNM = \angle A_0B_0M.$$

Следовательно, $MT \parallel A_0B_0$ и, значит, $OM \perp B_0C_0$. Точно так же показывается, что $ON \perp A_0C_0$, $OL \perp A_0B_0$.

Пусть теперь ABC есть какой-либо отличный от $A_0B_0C_0$ треугольник, вписанный в MNL (черт. 329, *б*). Обозначая радиус описанной окружности треугольника MNL через R и углы, образованные сторонами треугольника ABC соответственно с OM, ON и OL, через α, β и γ, получаем

$$S_{\triangle MNL}=S_{\triangle B_0MA_0}+S_{\triangle A_0NC_0}+S_{\triangle C_0LB_0}=$$
$$=\frac{1}{2}A\cdot B_0A_0+\frac{1}{2}R\cdot A_0C_0+\frac{1}{2}R\cdot C_0B_0=\frac{1}{2}R\,(B_0C_0+A_0C_0+A_0B_0)$$

и

$$S_{\triangle MNL}=S_{\triangle BMA}+S_{\triangle ANC}+S_{\triangle CLB}=$$
$$=\frac{1}{2}R\cdot BA\sin\alpha+\frac{1}{2}R\cdot AC\sin\beta+\frac{1}{2}R\cdot CB\sin\gamma<$$
$$<\frac{1}{2}R\,(BC+AC+AB),$$

откуда сразу следует, что

$$B_0C_0+A_0C_0+A_0B_0<BC+AC+AB$$

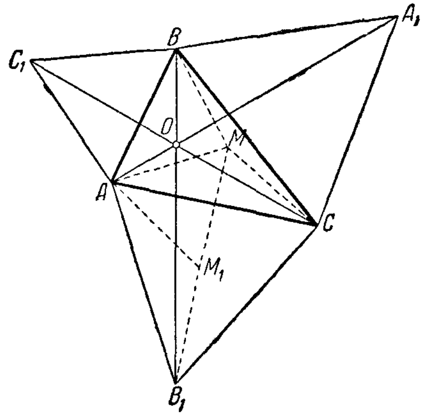
Примечание 2. Аналогично задаче 144в) можно поставить задачу об отыскании четырехугольника наименьшего периметра, вершины которого лежат на четырех данных прямых. Однако в противоположность задаче 144в) решение этой задачи во всех случаях, когда она имеет единственное решение, будет даваться вырожденным четырехугольником (см., например, Ж. Адамар, Элементарная геометрия, задача 362а), Учпедгиз, 1948). Вообще можно показать, что задача «вписать в данный n-угольник n-угольник наименьшего возможного периметра», будет, вообще говоря, иметь единственное и притом невырожденное решение в случае нечетного n и будет невозможна (т. е. будет приводить к вырожденным многоугольникам) или неопределенна в случае четного n.

145. Первое решение. Построим на сторонах данного треугольника ABC вне его равносторонние треугольники ABC_1, ACB_1 и BCA_1 (черт. 330). Тогда, как показано в решении задачи 68б), прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O, из которой каждая сторона треугольника ABC видна под углом $120°$[1]). Пусть теперь M — произвольная точка плоскости треугольника ABC. Повернем треугольник ABM

---

[1]) Оба решения настоящей задачи предполагают, что точка O пересечения построенных на сторонах треугольника сегментов, вмещающих по $120°$, существует и лежит внутри треугольника. Последнее обстоятельство не будет иметь места, если один из углов треугольника больше $120°$. Предоставляем читателю самостоятельно доказать, что в этом последнем случае искомая точка совпадает с вершиной тупого угла треугольника.

вокруг точки A на $60°$ (по часовой стрелке). Пусть точка M перейдет при этом в точку M_1. Тогда треугольник AMC пе-



Черт. 330.

рейдёт в треугольник AM_1B_1. При этом мы имеем

$$AM = AM_1 = MM_1,$$
$$CM = B_1M_1$$

и, следовательно,

$$AM + BM + CM = B_1M_1 + M_1M + MB > B_1B.$$

Так как

$$AO + BO + CO = B_1B$$

(см. решение задачи 68б)), то

$$AM + BM + CM > AO + BO + CO.$$

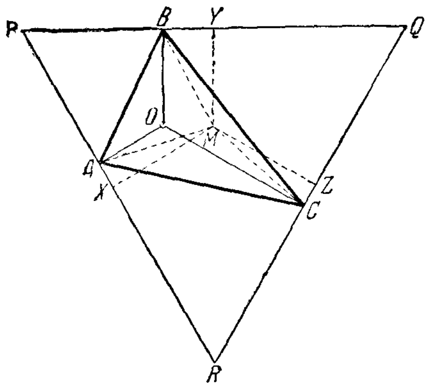
Следовательно, точка O и есть искомая.

Второе решение. Пусть O есть точка, из которой все стороны треугольника видны под углом $120°$, PQR — описанный вокруг ABC треугольник, стороны которого перпендикулярны соответственно к OA, OB и OC, M — какая угодно другая точка треугольника ABC (черт. 331) (треугольник PQR будет, очевидно, равносторонним). Опустим из M

перпендикуляры MX, MY и MZ на стороны треугольника PQR. Нетрудно видеть, что

$$OA + OB + OC = MX + MY + MZ$$

(проще всего доказать это предложение, если воспользовать-



Черт. 331.

ся тем, что $S_{\triangle PQR} = S_{\triangle OPQ} + S_{\triangle OQR} + S_{\triangle ORP} = S_{\triangle MPQ} + S_{\triangle MQR} + S_{\triangle MRP}$). Но, очевидно,

$$MX \leqslant MA, \qquad MY \leqslant MB, \qquad MZ \leqslant MC,$$

откуда следует, что

$$OA + OB + OC \leqslant MA + MB + MC.$$

146. Первое решение. Пусть AD, BE и CF — медианы треугольника ABC, I — точка пересечения медиан, P — основание перпендикуляра, опущенного из произвольной точки M на медиану AD (черт. 332). Соединим точку M с точками A, B, C, D и I. Пусть для определенности $\angle MIA < 90°$, $\angle MID > 90°$. Из треугольников MAI и MID получаем

$$MA^2 = MI^2 + AI^2 - 2AI \cdot IP,$$
$$MD^2 = MI^2 + ID^2 + 2ID \cdot IP.$$

Умножая второе из этих равенств на 2 и складывая, получаем (учитывая, что $2ID = AI$)

$$MA^2 + 2MD^2 = 3MI^2 + AI^2 + 2ID^2.$$

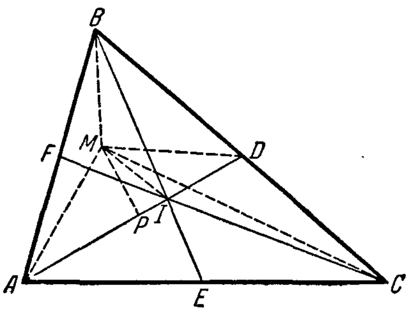
Но MD есть медиана треугольника BMC, а ID — медиана треугольника BIC. Отсюда по известной формуле имеем

$$MD^2=\frac{1}{2}(MB^2+MC^2)-\frac{1}{4}BC^2, \quad ID^2=\frac{1}{2}(IB^2+IC^2)-\frac{1}{4}BC^2$$

и, следовательно,

$$MA^2+MB^2+MC^2-\frac{1}{2}BC^2=$$
$$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2-\frac{1}{2}BC^2;$$
$$MA^2+MB^2+MC^2=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2. \qquad (*)$$

Из последней формулы сразу следует, что искомой точкой является точка пересечения медиан треугольника.



Черт. 332.

Второе решение. Приведем еще одно изящное решение задачи, требующее меньше вычислений, чем первое решение.

Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC со сторонами a, b, c; M — произвольная точка плоскости (черт. 333). Дополнив треугольник AMB до параллелограмма $AMBM'$, будем иметь (сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон)

$$2MA^2+2MB^2=MM'^2+AB^2$$

или

$$2MA^2+2MB^2=4MC_1^2+c^2.$$

Точно так же доказывается, что

$$2MA^2+2MC=4MB_1^2+b^2$$

и

$$2MB^2 + 2MC^2 = 4MA_1^2 + a^2.$$

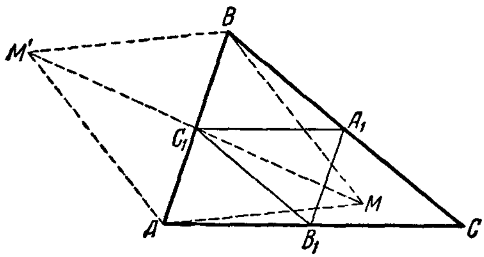
Складывая эти три равенства, получаем

$$4MA^2 + 4MB^2 + 4MC^2 = $$
$$= 4MA_1^2 + 4MB_1^2 + 4MC_1^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

или

$$MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

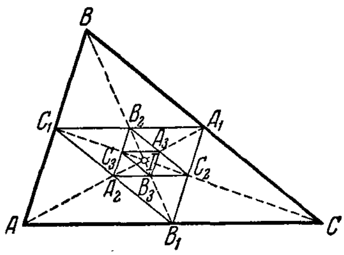
Таким образом, сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до точек A_1, B_1, C_1 отличается лишь на постоянное слагаемое от суммы квадратов расстояний от этой же точки до вершин треугольника ABC. Отсюда следует, что сумма квадратов расстояний от точки M до вершин



Черт. 333.

треугольника ABC будет наименьшей для той же точки, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника $A_1B_1C_1$ является наименьшей.

Точно так же сумма квадратов расстояний от точки M до точек A_1, B_1 и C_1 будет наименьшей для той точки, сумма квадратов расстояний от которой до середин A_2, B_2, C_2 сторон треугольника $A_1B_1C_1$ является наименьшей; сумма квадратов расстояний от точки M до точек A_2, B_2, C_2 будет наименьшей для той точки, сумма квадратов расстояний от которой до середин A_3, B_3, C_3 сторон треугольника $A_2B_2C_2$ является наименьшей и т. д. Таким образом, мы получаем систему треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ и т. д., каждый из которых составлен из средних линий предыдущего; для того чтобы найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин первого треугольника является наименьшей, достаточно найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин какого-нибудь из этих треугольников наименьшая. Но все треугольники ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и т. д. подобны между собой и стороны каждого в два раза меньше соответствующих сторон предыдущего; таким образом, стороны треугольника $A_1B_1C_1$ в два раза меньше сторон треугольника ABC, стороны $A_2B_2C_2$ в четыре раза меньше, стороны $A_3B_3C_3$ в восемь раз меньше и т. д. Отсюда следует, что треугольники $A_nB_nC_n$ при $n \to \infty$ «стягиваются к точке», т. е. что все вершины этих треугольников все более приближаются к одной и той же точке I плоскости (черт. 334).



Черт. 334.

Отсюда следует, что если n достаточно велико, то расстояния MA_n, MB_n, MC_n, где M — произвольная точка плоскости, все будут очень мало отличаться от расстояния MI; следовательно, сумма $MA_n^2 + MB_n^2 + MC_n^2$ будет сколь угодно мало отличаться от $3MI^2$. Таким образом, точка, сумма квадратов расстояний от которой до вершин каждого из треугольников $A_nB_nC_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ является наименьшей, должна совпадать с точкой, утроенный квадрат расстояния от которой до точки I является наименьшим. А такой точкой, очевидно, является сама точка I.

Теперь нам осталось только выяснить, что́ это за точка. Это нетрудно сделать. Проведем прямые AA_1, BB_1, CC_1 (см. черт. 334); это будут, очевидно, медианы треугольника ABC. Но эти прямые будут одновременно служить и медианами треугольника $A_1B_1C_1$; следовательно, точка пересечения медиан треугольника ABC является одновременно и точкой пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$. Точно так же точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ является одновременно точкой пересечения медиан треугольника $A_2B_2C_2$; точка пересечения медиан треугольника $A_2B_2C_2$ является одновременно точкой пересечения медиан треугольника $A_3B_3C_3$ и т. д. Следовательно, точка пересечения медиан треугольника

ABC является одновременно точкой пересечения медиан всех наших треугольников. А значит, эта точка лежит внутри всех треугольников; следовательно, она должна совпасть с точкой I, к которой стягиваются все наши треугольники.

Примечание. Выше мы имели формулу

$$MA^2+MB^2+MC^2=MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{4}.$$

Совершенно аналогично получаем

$$MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2=MA_2^2+MB_2^2+MC_2^2+\frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{4},$$

где $a_1=\frac{a}{2}$, $b_1=\frac{b}{2}$, $c_1=\frac{c}{2}$ — стороны треугольника $A_1B_1C_1$, или

$$MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2=MA_2^2+MB_2^2+MC_2^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{16}.$$

Далее, также имеем

$$MA_2^2+MB_2^2+MC_2^2=MA_3^2+MB_3^2+MC_3^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{64},$$

. . . .

$$MA_{n-1}^2+MB_{n-1}^2+MC_{n-1}^2=MA_n^2+MB_n^2+MC_n^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{4^n}.$$

Складывая все эти формулы, получим

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\\&=MA_n^2+MB_n^2+MC_n^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{4}+\\&+\frac{a^2+b^2+c^2}{16}+\frac{a^2+b^2+c^2}{64}+\ldots+\frac{a^2+b^2+c^2}{4^n}=\\&=MA_n^2+MB_n^2+MC_n^2+\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}}(a^2+b^2+c^2)=\\&=MA_n^2+MB_n^2+MC_n^2+\frac{1-\frac{1}{4^n}}{3}(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

Переходя теперь к пределу при $n\to\infty$ и замечая, что при этом $MA_n^2+MB_n^2+MC_n^2\to 3MI^2$ (см. выше), имеем

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MI^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

что равносильно формуле (*) первого решения задачи.

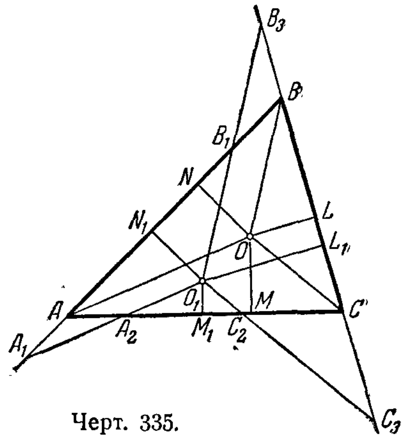
147. Докажем, что минимум суммы квадратов расстояний до сторон треугольника достигается в точке, расстояния которой от сторон пропорциональны этим сторонам (способ построения этой точки, из которого будет вытекать, что она существует и лежит внутри треугольника, мы дадим в конце решения задачи).

Пусть ABC — произвольный треугольник и пусть O — такая точка внутри него, что отношение расстояний от нее до сторон равно отношению этих сторон (черт. 335). Опустим из точки O перпендикуляры на стороны треугольника. Обозначим через L, M и N основания перпендикуляров, опущенных соответственно на стороны BC, AC и AB. По условию

$$OL:OM:ON = BC:AC:AB$$

или иначе: существует такое число, k, что

$$BC = k\cdot OL,$$
$$AC = k\cdot OM,$$
$$AB = k\cdot ON.$$



Черт. 335.

Соединим точку O с точками A, B и C. Обозначим через S площадь треугольника ABC и через S_1, S_2 и S_3 соответственно площади треугольников COB, AOC и BOA. Тогда мы будем иметь

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

Но, с другой стороны,

$$S_1 = \frac{BC\cdot OL}{2} = \frac{k}{2}\cdot OL^2,$$

$$S_2 = \frac{AC\cdot OM}{2} = \frac{k}{2}\cdot OM^2,$$

$$S_3 = \frac{AB\cdot ON}{2} = \frac{k}{2}\cdot ON^2$$

и, следовательно,

$$S=\frac{k}{2}(OL^2+OM^2+ON^2).$$

Пусть теперь O_1 — произвольная точка треугольника, отличная от O. Проведем через точку O_1 прямые, параллельные отрезкам OA, OB и OC. Обозначим точки пересечения прямой, параллельной OA, со сторонами (или продолжениями сторон) AB и AC через A_1 и A_2; прямой, параллельной OB, со сторонами AB и BC — через B_1 и B_3; прямой, параллельной OC, со сторонами AC и BC — через C_2 и C_3 (см. черт. 335). Опустим, далее, из точки O_1 перпендикуляры на стороны треугольника ABC и обозначим их основания соответственно через L_1, M_1 и N_1. Наконец, обозначим через $\overline{S}_1$ площадь треугольника $A_1O_1B_1$, через $\overline{S}_2$ площадь треугольника $A_2O_1C_2$ и через $\overline{S}_3$ площадь треугольника $B_3O_1C_3$.

Многоугольник, составленный из треугольников $A_1O_1B_1$, $A_2O_1C_2$ и $B_3O_1C_3$, содержит треугольник ABC внутри себя и потому имеет площадь, бо́льшую, чем этот треугольник, т. е.

$$\overline{S}_1+\overline{S}_2+\overline{S}_3>S.$$

С другой стороны, из подобия треугольников AOB и $A_1O_1B_1$, AOC и $A_2O_1C_2$, BOC и $B_3O_1C_3$ следует

$$A_1B_1=k\cdot O_1N_1,\quad A_2C_2=k\cdot O_1M_1,\quad B_3C_3=k\cdot O_1L_1;$$

таким образом, имеем

$$\overline{S}_1=\frac{k}{2}O_1N_1^2,\ \overline{S}_2=\frac{k}{2}O_1M_1^2,\quad \overline{S}_3=\frac{k}{2}O_1L_1^2,$$

$$\frac{k}{2}(O_1N_1^2+O_1M_1^2+O_1L_1^2)=\overline{S}_1+\overline{S}_2+\overline{S}_3>S=$$

$$=\frac{k}{2}(OL^2+OM^2+ON^2),$$

т. е.

$$O_1L_1^2+O_1M_1^2+O_1N_1^2>OL^2+OM^2+ON^2,$$

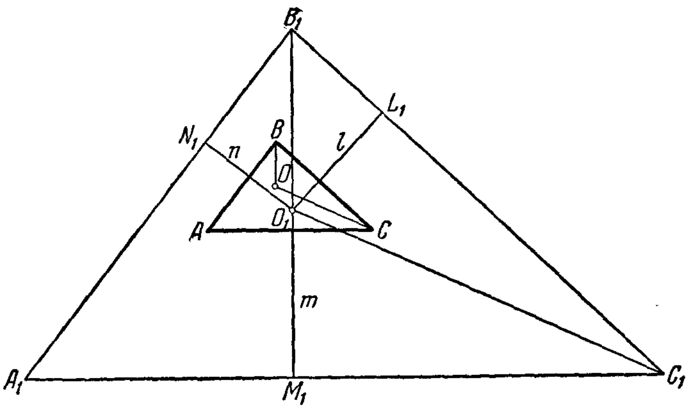
что и требовалось доказать.

Займемся теперь разысканием в треугольнике точки, отношение расстояний которой до сторон равно отношению сторон.

Пусть ABC — попрежнему произвольный треугольник. Возьмем внутри него произвольную точку O_1 и проведем через нее лучи, перпендикулярные к сторонам и пересекающие эти стороны (или их продолжения).

Пусть l — луч, перпендикулярный к BC, m — луч, перпендикулярный к AC и n — луч, перпендикулярный к AB (черт. 336).

Отложим на луче l от точки O отрезок O_1L_1, равный BC. Аналогично на луче m отложим отрезок O_1M_1, равный AC, и на луче n отрезок O_1N_1, равный AB.



Черт. 336.

Через точки L_1, M_1 и N_1 проведем прямые, перпендикулярные соответственно к l, m, n. Они образуют треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC.

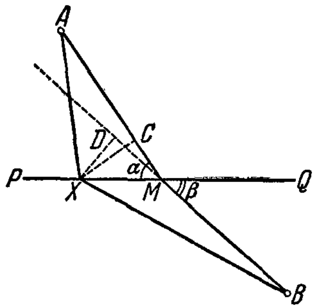
Точка O_1 отстоит от каждой из сторон этого треугольника на расстояния, относящиеся как эти стороны. Остается найти в треугольнике точку O, соответствующую при подобии точке O_1.

Для этого соединим точку O_1 с любой парой вершин треугольника $A_1B_1C_1$, например с B_1 и C_1, и через соответствующие вершины треугольника ABC проведем прямые, параллельные O_1B_1 и O_1C_1. Точка их пересечения, очевидно, и будет искомой точкой O.

148. Предположим сначала, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой PQ, и пусть M — такая точка этой прямой, что

$$\frac{\cos\angle AMP}{\cos\angle BMQ}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}=\frac{a}{b}.$$

Обозначим для простоты $\angle AMP=\alpha$, $\angle BMQ=\beta$ (черт. 337).



Черт. 337.

Пусть теперь X — произвольная точка прямой, отличная от M. Докажем, что

$$\frac{AM}{a}+\frac{BM}{b}<\frac{AX}{a}+\frac{BX}{b}.$$

Опустим из точки X перпендикуляры на прямые AM и BM и обозначим основания этих перпендикуляров соответственно через C и D. Легко видеть, что

$$MC=MX\cdot\cos\alpha,$$
$$MD=MX\cdot\cos\beta$$

и

$$\frac{MC}{MD}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{a}{b},$$

т. е.

$$\frac{MC}{a}=\frac{MD}{b}.$$

Теперь уже легко придти к требуемому результату:

$$\frac{AM}{a}+\frac{BM}{b}=\frac{AC+CM}{a}+\frac{BM}{b}=\frac{AC}{a}+\frac{CM}{a}+\frac{BM}{b}=$$
$$=\frac{AC}{a}+\frac{MD}{b}+\frac{MB}{b}=\frac{AC}{a}+\frac{BD}{b}.$$

Но $AX > AC$ и $BX > BD$. Следовательно,

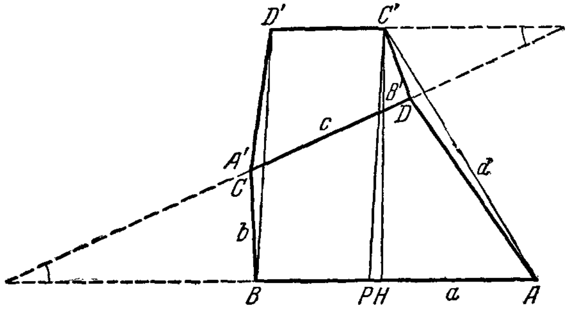
$$\frac{AM}{a}+\frac{BM}{b}<\frac{AX}{a}+\frac{BX}{b},$$

откуда

$$b\cdot AM+a\cdot BM<b\cdot AX+a\cdot BX,$$

что и требовалось доказать.

Если точки A и B лежат по одну сторону от прямой PQ, то, отразив одну из них относительно этой прямой, мы сможем применить приведенное выше доказательство.



Черт. 338.

149. Преобразуем подобно четырехугольник $ABCD$ ($AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$; черт. 338) с коэффициентом подобия $k=\frac{c}{a}$; при этом сторона $A'B'$ преобразованного четырехугольника $A'B'C'D'$ станет равна стороне CD четырехугольника $ABCD$. Приложим теперь четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равными сторонами, как указано на черт. 338. Площадь всей образовавшейся фигуры $ABCD'C'D$ равна, очевидно, $S_{ABCD}+S_{A'B'C'D'}=(1+k^2)\,S_{ABCD}$. Из того, что четырехугольник $A'B'C'D'$ подобен четырехугольнику $ABCD$, следует, что $\angle BCD' = \angle ADC'$ (на черт. 338 $\angle BCD' = \angle A + \angle C$, $\angle ADC' = 360° - (\angle D + \angle B)$). Произведения сторон треугольников ADC' и BCD', заключающих равные углы, также равны: $d(k \cdot b) = b(k \cdot d)$. Таким образом, $S_{ADC'} = S_{BCD'}$ и, следовательно, $S_{ABCD'C'D} = (1 + k^2) S_{ABCD} = S_{ABD'C'}$. Четырехугольник $ABD'C'$ является трапецией: параллельность сторон AB и $C'D'$ следует из равенства внутренних накрест лежащих углов, образованных ими с секущей CD. Нам надо выяснить, в каком случае площадь трапеции $ABD'C'$ с заданными основаниями $AB = a$ и $C'D' = k \cdot c = \frac{c^2}{a}$ будет наибольшей, т. е. в каком случае эта трапеция имеет наибольшую высоту.

Проведем $C'P \| D'B$ и рассмотрим треугольник $AC'P$, имеющий ту же высоту, что и трапеция $ABD'C'$ и основание

$$AP = AB - C'D' = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a}.$$

Отметим, что разность квадратов боковых сторон этого треугольника при заданных сторонах четырехугольника $ABCD$ является фиксированной. Действительно, по теореме косинусов имеем

$$AC'^2 = AD^2 + DC'^2 - 2AD \cdot DC' \cos \angle ADC',$$
$$C'P^2 = D'B^2 = BC^2 + CD'^2 - 2BC \cdot CD' \cos \angle BCD',$$

и так как

$$AD \cdot DC' = BC \cdot CD'$$

и

$$\angle ADC' = \angle BCD',$$

то

$$AC'^2 - C'P^2 = d^2 + (k \cdot b)^2 - b^2 - (k \cdot d)^2 = (d^2 - b^2)(1 - k^2) = \frac{(d^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2}.$$

Пусть $C'H$ — высота треугольника $AC'P$. Тогда

$$AC'^2 = AH^2 + C'H^2; \quad C'P^2 = PH^2 + HC'^2,$$
$$AC'^2 - C'P^2 = \frac{(a^2 - c^2)(d^2 - b^2)}{a^2} = AH^2 - PH^2 = (AH + HP)(AH - HP),$$

и так как

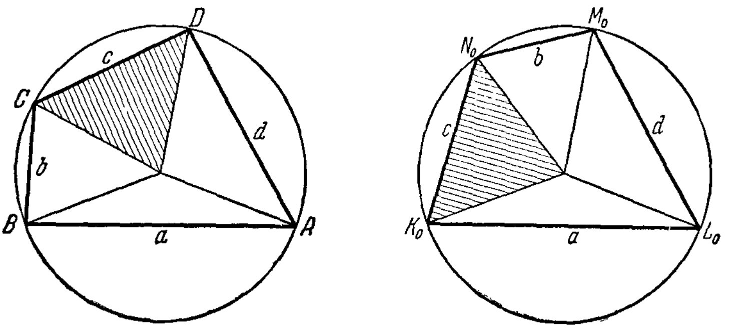
$$AH \pm HP = AP = AB - PB = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a}, \qquad (*)$$

то

$$AH \mp HP = \frac{d^2 - b^2}{a}. \qquad (**)$$

Равенства (*) и (**) полностью определяют положение точки H. А если основание высоты, опущенной из вершины C' на сторону AB, не зависит от углов треугольника $AC'P$, то ясно, что высота $C'H$ будет наибольшей в том случае, когда сторона AC' треугольника $AC'P$ будет наибольшей, т. е. когда $AC' = AD + DC'$, $\angle ADC' = \angle D + \angle B = 180°$ и вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

С другой стороны, известно, что всегда существует единственный вписуемый в круг четырехугольник, стороны которого, взятые в определенном порядке, имеют наперед заданные длины a, b, c, d и который можно вписать в круг. Построение этого четырехугольника нетрудно усмотреть из вышеприведенных рассуждений (отложим $AB = a$; зная отрезки $AP = AB - C'D'$, $PC' = BD' = BC + A'D'$ и $AC' = AD + B'C'$, мы сразу можем построить точку C', а следовательно, и найти



Черт. 339.

вершину D четырехугольника $ABCD$). При этом в условии настоящей задачи нет необходимости требовать, чтобы порядок сторон в четырехугольнике $ABCD$ был определен (предположение, из которого мы исходили в нашем решении): если в каком-либо четырехугольнике $KLMN$ стороны следуют, например, в порядке $KL=a$, $LM=d$, $MN=b$, $NK=c$, то площадь его меньше площади четырехугольника $K_0L_0M_0N_0$ ($K_0L_0=a$, $L_0M_0=d$, $M_0N_0=b$, $N_0K_0=c$), который можно вписать в круг, а площадь последнего четырехугольника, как легко усмотреть из черт. 339, равна площади четырехугольника $ABCD$, который можно вписать в круг со сторонами $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$.

150. Примем известный нам периметр искомого четырехугольника за единицу. Будем искать не четырехугольник $ABCD$ с данными углами, имеющий периметр 1 и наибольшую возможную площадь, а какой-либо четырехугольник $A'B'C'D'$, подобный $ABCD$. Площадь четырехугольника $ABCD$, подобного четырехугольнику $A'B'C'D'$ и имеющего периметр 1, равна, очевидно, отношению $\frac{S}{p^2}$ площади четырехугольника $ABCD$ к квадрату его периметра. Действительно, коэффициент подобия четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равен отношению их периметров, т. е. $\frac{1}{p}$ (периметр четырехугольника $ABCD$ равен 1), площадь $ABCD$ равна площади $A'B'C'D'$, умноженной на квадрат коэффициента подобия, т. е.

$$S\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{S}{p^2}.$$

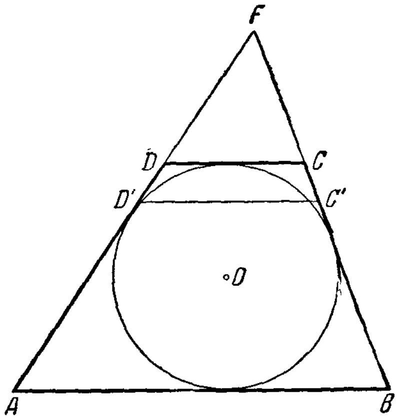
Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы найти тот из четырехугольников, имеющих наперед заданные углы, для которого отношение площади к квадрату периметра имеет наибольшее возможное значение. Теорема задачи утверждает, что таким будет четырехугольник $ABCD$, который можно описать около окружности. Докажем эту теорему.

Построим треугольник ABF, два угла которого равны углам A и B искомого четырехугольника [1]). Нам надо пере-

---

[1]) Такой треугольник невозможно построить лишь в том случае, когда сумма каждых двух соседних углов четырехугольника $ABCD$ равна 180°. В этом исключительном случае теорема настоящей задачи принимает следующий вид: доказать, что из всех параллелограммов с данным острым углом и данным периметром наибольшую площадь имеет ромб. Эта теорема может быть очень просто доказана алгебраически. Действи-

сечь этот треугольник прямой CD данного направления так, чтобы у получившегося четырехугольника $ABCD$ отношение площади к квадрату периметра было возможно бо́льшим. Впишем в треугольник ABF окружность и проведем прямую CD



Черт. 340.

заданного направления таким образом, чтобы она касалась вписанной окружности (черт. 340). Докажем, что четырехугольник $ABCD$ обладает указанным свойством. Рассмотрим четырехугольник $ABC'D'$, где $C'D'$ — произвольная прямая, параллельная CD. Нам надо доказать, что

$$\frac{S_{ABCD}}{(AB+BC+CD+DA)^2} \geqslant \frac{S_{ABC'D'}}{(AB+BC'+C'D'+D'A)^2}.$$

тельно, обозначим заданный острый угол параллелограмма через α; стороны параллелограмма пусть будут равны a и $2p-a$, а стороны ромба — p и p ($4p$ есть общий периметр параллелограмма и ромба). В этом случае

$$S_{\text{параллелограмма}} = a(2p-a)\sin\alpha$$

и

$$S_{\text{ромба}} = p^2 \sin\alpha,$$

откуда сразу следует, что $S_{\text{параллелограмма}} < S_{\text{ромба}}$, так как

$$a(2p-a) < p^2,$$

ибо

$$p^2 - a(2p-a) = p^2 - 2ap + 2a^2 = (p-a)^2 + a^2 > 0.$$

Обозначим радиус окружности, вписанной в треугольник ABF, через r и центр этой окружности — через O, коэффициент подобия треугольников FCD и $FC'D'$ обозначим через k (k — некоторое произвольное число, которое может быть и больше и меньше единицы). Очевидно, что

$$S_{ABF}=S_{OAB}+S_{OAF}+S_{OBF}=\frac{1}{2}r(AB+BF+FA),$$

$$S_{CDF}=S_{ODF}+S_{OFC}-S_{OCD}=\frac{1}{2}r(FD+FC-DC)$$

и

$$S_{C'D'F}=k^2S_{CDF}.$$

Отсюда

$$S_{ABCD}=S_{ABF}-S_{CDF}=$$
$$=\frac{1}{2}r[(AB+BF+FA)-(FD+FC-DC)],$$

и

$$S_{ABC'D'}=S_{ABF}-S_{C'D'F}=$$
$$=\frac{1}{2}r\ [(AB+BF+FA)=k^2\ (C'F+FD'-D'C')],$$

или, если обозначить $AB+BF+FA$ через $2p$, а $CF+FD-$ $-DC$ — через $2q$:

$$S_{ABCD}=r(p-q),$$
$$S_{ABC'D'}=r(p-k^2q).$$

Далее, из подобия треугольников CDF и $C'D'F$ будет следовать

$$C'F+FD'=2kq,$$

откуда получим

$$AB+BC+CD+DA=$$
$$=AB+BF+FA-(CF+FD-CD)=2(p-q),$$
$$AB+BC'+C'D'+D'A=$$
$$=AB+BF+FA-(C'F+FD'-C'D')=2(p-kq).$$

В силу всего этого неравенство, которое нам надо доказать, принимает следующий вид:

$$\frac{r(p-q)}{4(p-q)^2}\geqslant\frac{r(p-k^2q)}{4(p-kq)^2},$$

или после сокращения на положительное число $\frac{r}{4}$:

$$\frac{1}{p-q} \geqslant \frac{p-k^2q}{(p-kq)^2}.$$

Переводя оба члена неравенства в левую часть и умножая его на положительное число $(p-q)(p-kq)^2$, получим

$$(p-kq)^2-(p-q)(p-k^2q) \geqslant 0,$$
$$p^2-2kpq+k^2q^2-p^2+(1+k^2)pq-k^2q^2 \geqslant 0,$$
$$(1-2k+k^2)pq \geqslant 0,$$
$$(1-k)^2pq \geqslant 0,$$

а это последнее неравенство, очевидно, справедливо. Этим и заканчивается доказательство.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Первую монету следует положить на центр доски.

2. Наибольшая окружность проходит по восьми черным клеткам.

3. При доказательстве воспользуйтесь следующим предложением: если в треугольнике равны две высоты, то он равнобедренный.

4. Могут.

5. 3.

6. а) 13.
б) 1949.

7. а) $65\left(=\frac{13\cdot 10}{2}\right)$.

б) 1 897 351. Докажите, пользуясь методом математической индукции, что наибольшее возможное число точек самопересечения n-звенной замкнутой ломаной при n четном равно $\frac{n(n-4)}{2}+1$.

8. а) Докажите, что у каждого многоугольника можно найти диагональ, которая разбивает его на два многоугольника с меньшим числом сторон.

б) Используйте предложение задачи а).

9. а) Воспользуйтесь теоремой о треугольниках с двумя соответственно равными сторонами.

б) Докажите предварительно, что если имеются две выпуклые ломаные $PA_1A_2\ldots A_kQ$ и $P'A'_1A'_2\ldots A'_kQ'$ с соответственно равными звеньями и все углы первой ломаной не меньше соответствующих углов второй ломаной, то $PQ \geqslant P'Q'$ (причем $PQ = P'Q'$ только в том случае, когда сами ломаные равны между собой).

10. Рассмотрите дополнительно еще треугольник $AB'C'$, симметричный исходному равностороннему треугольнику ABC относительно вершины A (окружность катится по стороне BC).

11. Этим свойством обладает кривая, состоящая из двух дуг окружности по 120° каждая.

12. Рассмотрите отдельно случаи, когда два угла квадрата находятся внутри треугольника и когда только один угол квадрата лежит внутри треугольника.

13. Ни одного разреза, если исходный треугольник равнобедренный; один разрез, если он прямоугольный, или если один его угол равен удвоенному второму, или если один угол на 90° больше половины другого угла; два разреза — во всех остальных случаях.

14. Воспользуйтесь тем, что середины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 лежат на средних линиях треугольника.

15. Точки Z заполняют многоугольник, стороны которого параллельны сторонам треугольников ABC и DEF. Если эти два треугольника не имеют параллельных сторон, то полученный многоугольник имеет шесть сторон, соответственно равных и параллельных всем сторонам ABC и всем сторонам DEF. Если треугольники ABC и DEF имеют параллельные стороны, то многоугольник может иметь и меньше шести сторон; в этом случае одна его сторона (или несколько сторон) может быть параллельна параллельным между собой сторонам треугольников ABC и DEF и равна их сумме.

16. Воспользуйтесь тем, что путь из точки A в точку B равен разности длин касательных, проведенных к окружности из этих точек.

17. а) Рассмотрите наименьший выпуклый многоугольник, содержащий внутри себя все пять точек.

б) Рассмотрите отдельно случай, когда внутри четырех треугольников, получаемых при соединении точки A_9 со всеми вершинами квадрата, лежат по одной из точек A_5, A_6, A_7 и A_8 и когда хотя бы в одном из этих треугольников лежат две точки.

18. Рассмотрите все круги наименьшего возможного радиуса, содержащие какие-либо выбранные три из заданных точек; докажите, что наибольший из всех таких кругов (или каждый из наибольших, если среди них есть несколько равных кругов, бо́льших остальных) содержит все заданные точки.

19. Рассмотрите отдельно случаи, когда все стороны треугольника PQR пересекают соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$, образованного средними линиями ABC, и когда у треугольников PQR и $A_1B_1C_1$ есть пара непересекающихся соответствующих сторон.

20. Последовательно рассмотрите случаи, когда плоскость сечения проходит через ребро тетраэдра, когда она проходит через вершину тетраэдра, и общий случай.

21. Наибольший центрально-симметричный многоугольник с данным центром O, заключающийся внутри треугольника ABC, представляет собой пересечение треугольника ABC и треугольника $A_1B_1C_1$, симметричного ABC относительно O. Таким образом, остается только выбрать точку O так, чтобы это пересечение было возможно бо́льшим; для этого надо, чтобы точка O совпала с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

22. а) Воспользуйтесь методом математической индукции (по числу звеньев ломаной).

б) Равнобедренный треугольник с основанием a (он будет даже равносторонним).

23. Докажите, что всякий вписанный в многоугольник M треугольник по площади не больше по крайней мере одного из треугольников, вершины которых совпадают с вершинами M.

24. Докажите, что каждый отрезок MM', где M — точка треугольника ABC, а M' — точка $A'B'C'$, меньше по крайней мере одного из рассматриваемых девяти отрезков.

25. Воспользуйтесь тем, что $(\alpha-\beta)(a-b)\geqslant 0$ и $\alpha(b+c-a)\geqslant 0$.

26. а) Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного на самую близкую сторону многоугольника, лежит на самой стороне, а не на ее продолжении.

б) Решается совершенно аналогично задаче а).

27. Докажите предварительно, что если через точку O, взятую на биссектрисе угла BAC величины α, проведена какая угодно прямая l, пересекающая стороны угла в двух (различнах) точках M и N, то

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,\frac{1}{AO};$$

здесь отрезки AM и AN берутся с соответствующими знаками.

28. Обозначим $\frac{M_1A_1}{M_1A_2}=\lambda_1$, $\frac{M_2A_2}{M_2A_3}=\lambda_2$; при этом отношения λ_1 и λ_2 могут быть положительными или отрицательными в соответствии с правилом, приведенным на стр. 46—48. Докажите, что в таком случае

$$\lambda_2=\frac{1}{2\cos\alpha+1}\cdot\frac{1}{1-\lambda_1};$$

здесь α — внешний угол n-угольника $\left(\alpha=\frac{360^\circ}{n}\right)$.

29. Покажите, что среди отрезков, покрывающих отрезок I длины 1, можно выбрать такие отрезки $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k$, полностью покрывающие I, что каждый из этих отрезков пересекается только с двумя соседними.

30. Теорема доказывается методом математической индукции (по числу полуплоскостей).

31. а) Теорема доказывается методом математической индукции (по числу полуплоскостей).

б) Воспользуйтесь результатом задачи а).

32. а) Воспользуйтесь тем, что и площадь треугольника и площадь трапеции равны средней линии, умноженной на высоту.

б) Докажите, что сумма длин проекций всех звеньев ломаной хотя бы на одну из сторон квадрата не меньше $\frac{500}{\sqrt{2}}>350$.

33. Нет; если фигура имеет два центра симметрии, то нетрудно найти бесконечно много других ее центров симметрии.

34. Прежде всего покажите, что две оси симметрии обязательно пересекаются внутри многоугольника. Далее, рассмотрите три оси симметрии, образующие треугольник, и докажите, что для каждой точки N многоугольника найдется точка, более удаленная от произвольно выбранной внутренней точки K треугольника, чем точка N. Отсюда уже следует утверждение задачи.

35. Нигде не будут задержаны лишь 14-я, 23-я и 24-я машины. Этот результат не зависит от того, равны ли между собой расстояния между пунктами $A_1, A_2, \ldots, A_{30}$ или нет.

36. Число точек самопересечения равно наибольшему целому числу n такому, что $n\alpha < 180°$.

37. а) Нельзя.
б) Можно.

38. а) Воспользуйтесь методом математической индукции.
б) Воспользуйтесь предложением задачи а).

39. 1; 1; $\sqrt{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Наиболее выгодным во всех случаях является расположение точек в вершинах правильного n-угольника.

40. $\sqrt{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $2\sin 75°$. Наиболее выгодными для случаев $n=4$ и $n=5$ будут правильные n-угольники, а для случая $n=6$ — шестиугольник, углы которого попеременно имеют величину 90 и 150°.

41. n должно быть нечетным.

42. Круг радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Воспользуйтесь теоремой задачи 18.

43. Квадрат со стороной 1.

44. Круг радиуса $^1/_4$.

45. В задаче требуется доказать, что расстояние от точки A_0 до любой из вершин ломаной не превосходит четырех. Пусть A_k — какая-то вершина ломаной ($k=2, 3, 4, \ldots, n-1$ или n). Обозначим через $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ окружности, описанные вокруг треугольников $A_0A_1A_2, A_1A_2A_3, \ldots, A_{k-2}A_{k-1}A_k$; $O_1, O_2, \ldots, O_k$ — центры этих треугольников. В таком случае

$$A_0A_k \leqslant A_0O_1 + (O_1O_2 + O_2O_3 + \ldots + O_{k-2}O_{k-1}) + O_{k-1}A_k,$$

так что остается оценить отрезки A_0O_1 и $O_{k-1}A_k$ и ломаную $O_1O_2O_3\ldots O_{k-1}$.

Покажите, что $A_0O_1 \leqslant 1$, $A_kO_{k-1} \leqslant 1$ и что

$$O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_4 + \ldots + O_{k-2}O_{k-1} \leqslant \frac{1}{2}(\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Для доказательства последнего неравенства рассмотрите наряду с окружностями C_2, C_3, ..., C_{k-1} еще равные предыдущим окружности C'_2, C'_3, ..., C'_{k-1}, проходящие через точки A_0 и A_1.

46. Наименьший возможный угол равен

$$\arccos\left(1-\frac{1}{2R^2}\right), \text{ если } R \geqslant r \geqslant R-\frac{1}{R};$$

$$\arccos\frac{R^2+r^2-1}{2Rr}, \text{ если } R-\frac{1}{R} \geqslant r \geqslant R-1;$$

$$0, \quad \text{ если } R-1 \geqslant r.$$

47. Обозначим радиус наименьшего круга, внутри которого можно поместить n точек, одна из которых совпадает с центром круга и расстояние между каждыми двумя из которых не меньше 1, через R_n. Тогда

$$R_2 = R_3 = \ldots = R_7 = 1,$$

$$R_8 = \frac{1}{2\sin\frac{180°}{7}}, \quad R_9 = \frac{1}{2\sin\frac{180°}{8}}, \quad R_{10} = \frac{1}{2\sin\frac{180°}{9}}, \quad R_{11} = \frac{1}{2\sin\frac{180°}{10}}.$$

Для доказательства воспользуйтесь результатом задачи 46.

48. Воспользовавшись результатом задачи 46, покажите, что внутри круга радиуса 2 нельзя поместить 20 точек, одна из которых совпадает с центром круга и расстояние между каждыми двумя из которых не меньше 1. То, что 19 точек можно расположить таким образом, доказывается несложным примером.

49. 6; 12.

50. 18. Доказательство следует из результата задачи 48.

51. 8. Для доказательства воспользуйтесь результатом задачи 46.

52. 4. Для доказательства удобно воспользоваться тем, что если все двугранные углы трехгранного угла острые, то и плоские углы—острые.

53. В диаметрально противоположных точках; в вершинах правильного треугольника, вписанного в большой круг сферы; в вершинах вписанного правильного тетраэдра; в каких-либо пяти вершинах вписанного правильного октаэдра (решение не однозначно); в вершинах правильного вписанного октаэдра. Последние два результата непосредственно следуют из теоремы задачи 52.

54. 7.

55. Киоски следует поместить на трех радиусах площади, образующих друг с другом углы 120°, на расстояниях от центра, равных половине радиуса площади. Для доказательства воспользуйтесь тем, что настоящая задача равносильна следующей: покрыть круг тремя равными кругами возможно меньшего радиуса.

56. Искомое число k есть наименьшее целое число такое, что $kl \geqslant 2R$.

Для доказательства опишите на данном круге, как на экваторе, полусферу и рассмотрите полупояса и полусегменты сферы, которые проектируются в покрывающие круг полоски.

57. а) Воспользуйтесь тем, что прямая, соединяющая точку пересечения боковых сторон трапеции с точкой пересечения диагоналей, делит оба основания пополам.

б) См. указание к задаче а).

в) Воспользуйтесь задачей б).

г) Пусть S — произвольная точка плоскости, P — некоторая точка отрезка AB, C и D — точки пересечения прямых SA и SB с прямой l_1, T — точка пересечения CP и AD, P' — точка пересечения ST с прямой l. Докажите, что если $AP = \frac{1}{n} AB$, то $AP' = \frac{1}{n+1} AB$.

58. Воспользуйтесь тем, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

59. а) Воспользуйтесь задачей 57 б).

б) Воспользуйтесь задачей а) и задачей 58.

60. а) Воспользуйтесь задачей 57 б).

б) Воспользуйтесь задачей а).

61. Воспользуйтесь тем, что если AD и BM — параллельные прямые, направленные в разные стороны от AB, $BM = nAC$ и P есть точка пересечения прямой DM с отрезком AB, то $AP = \frac{1}{n+1} AB$.

62. а) Воспользуйтесь тем, что сторона вписанного в окружность правильного шестиугольника равна радиусу окружности.

б) Воспользуйтесь задачей а).

в) Воспользуйтесь тем, что если A есть произвольная точка окружности C, M и N — точки пересечения окружности C с какой-либо окружностью S с центром в A, A_1 — точка, симметричная A относительно прямой MN, P и Q — точки окружности S, удаленные от A_1 на расстояние AA_1, то центр O окружности C симметричен A относительно прямой PQ.

63. Постройте на сторонах треугольника AB подобные между собой треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1 с углами $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$; точка M найдется как точка пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1.

64. Воспользуйтесь тем, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны (с помощью линейки с параллельными краями удобно строить ромбы — параллелограммы с равными высотами).

65. Решите обратную задачу: описать вокруг данного треугольника PQR треугольник, равный другому данному треугольнику ABC.

66. а) Докажите, что прямые AP, BQ, CR являются высотами треугольника PQR.

б) Докажите, что прямые AP, BQ, CR являются биссектрисами треугольника PQR.

в) Воспользуйтесь тем, что прямая OQ, где O — центр окружности, параллельна высоте треугольника.

67. а) Докажите, что высоты треугольника с вершинами в заданных точках являются перпендикулярами к серединам сторон искомого треугольника.

б) Докажите, что биссектрисы треугольника с вершинами в заданных точках являются высотами искомого треугольника.

68. а) Докажите, что треугольник B_1DC_1, где D есть середина стороны BC,— равнобедренный прямоугольный.

б) Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, из которой стороны треугольника $A_1B_1C_1$ видны под равными углами.

69. а) Докажите, что биссектрисы треугольника с вершинами в заданных точках являются высотами треугольника ABC.

б) Докажите, что высоты треугольника с вершинами в заданных точках являются биссектрисами треугольника ABC.

в) Докажите предварительно, что описанная окружность делит пополам отрезок между центрами вписанной и вневписанной окружностей.

70. а) Первое решение. Пусть $BE \perp AC$; E — точка пересечения BE со стороной квадрата, противоположной той, на которой лежит B. Докажите, что $BE = AC$.

Второе решение. Воспользуйтесь тем, что диагонали квадрата делят его углы пополам.

б) На этот случай хорошо переносится первое решение задачи а).

в) На этот случай хорошо переносится второе решение задачи а).

71. Решается аналогично первому решению задачи 70 а).

72. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, Σ_1, Σ_2 и Σ_3 — окружности, вписанные в треугольники ABO, BCO и ACO. В таком случае каждая из трех искомых окружностей касается общих внутренних касательных двух пар из окружностей Σ_1, Σ_2, Σ_3 (отличных от прямых AO, BO, CO).

73. Докажите, что точки пересечения искомых окружностей лежат на высотах треугольника $O_1O_2O_3$.

74. Пусть прямые AX и BX пересекают окружность соответственно в точках M и N; K — точка пересечения с окружностью прямой, параллельной AB, проведенной через точку N; C — точка пересечения KM с AB. Докажите, что положение точки C на прямой AB можно определить, не зная еще точки X.

75. а) Пусть MN — искомый отрезок. Рассмотрите угол ANB_1, где B_1 — точка, получающаяся из B параллельным перенесением на расстояние a в направлении l.

б) Пусть MN — искомый отрезок. Рассмотрите угол ANB_1, где B_1 — точка, получающаяся из B симметрией относительно точки C.

76. Рассмотрите окружность S, вневписанную по отношению к треугольнику ABC.

77. а) Рассмотрите ломаную AXB', где точка B' симметрична B относительно l.

б) Воспользуйтесь тем, что окружность с центром в точке X, проходящая через точку A, проходит также через точку A', симметричную A относительно l, и касается окружности с центром B и радиусом a.

78. а), б), в), г). Замените треугольник ABC прямоугольным треугольником $AB'C$ (угол A прямой) той же высоты.

д) Замените треугольник ABC равнобедренным прямоугольным треугольником $AB''C$ (угол A прямой).

79. Воспользуйтесь тем, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

80. Рассмотрите более общую задачу: вписать в данную окружность n-угольник, k смежных сторон которого проходят через k заданных точек, а остальные $n-k$ сторон параллельны известным направлениям (задача 80 получается из этой задачи, если $k=n$). Эту задачу можно решить при помощи метода математической индукции по числу k (при этом приходится воспользоваться приемом, аналогичным примененному в решении задачи 74; следует заметить, что задача 74 тоже является частным случаем этой общей задачи).

81. Пусть S есть произвольная окружность, проведенная на шаре из центра A, M — какая-то точка этой окружности, B — точка шара, диаметрально противоположная A. В таком случае треугольник AMB может быть отдельно построен на листе бумаги.

82. а) Воспользуйтесь задачей 81.

б) Воспользуйтесь задачей а).

83. а) Искомое геометрическое место состоит из восьми отдельных лучей.

б) Искомое геометрическое место представляет собой прямоугольник.

84. а) Искомое геометрическое место не является линией или совокупностью нескольких линий.

б) Искомое геометрическое место состоит из нескольких отрезков и лучей.

85. Воспользуйтесь тем, что искомое геометрическое место не изменится, если как угодно сдвинуть отрезки AB, CD и EF вдоль сторон треугольника PQR.

86. Оба геометрических места представляют собой окружности.

87. Искомое геометрическое место представляет собой дугу окружности (или, если окружности S_1 и S_2 равны,— отрезок прямой).

88. Длина отрезка равна разности гипотенузы и меньшего катета треугольника ABC.

89. а) Все три геометрических места представляют собой окружности.

б) Докажите, что величина дуги NP окружности C_2 не зависит от выбора точки M.

90. а) Докажите, что если PQR — искомый треугольник, то $S_{\triangle PQR} = \pm \frac{1}{4}\left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right) S_{\triangle ABC}$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC, а d — расстояние от точки M до центра O описанной окружности.

б) Воспользуйтесь методом математической индукции (по числу сторон многоугольника).

91. Воспользуйтесь равенством треугольников AO_1O_4, BO_1O_2, CO_2O_3 и DO_3O_4, где O_1, O_2, O_3, O_4 — центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма $ABCD$.

92. Пусть O_1 и O_2 — центры равносторонних треугольников, построенных на боковых сторонах AB и BC треугольника ABC, O — вершина равностороннего треугольника O_1O_2O. Воспользуйтесь тем, что при симметрии сначала относительно OO_1, а затем относительно OO_2 точка A переходит в C.

93. Проведите через точку P прямую, параллельную AB.

94. Опишите вокруг треугольника окружность.

95. См. указание к предыдущей задаче.

96. Докажите предварительно, что два треугольника равны, если равны их основания, углы при вершине и биссектрисы, проведенные к основанию.

97. Пусть T есть точка пересечения прямых AY и BX, ZUV — равносторонний треугольник, вершины U и V которого лежат соответственно на прямых AT и BT. Докажите, что треугольник XYZ совпадает с ZUV.

98. Воспользуйтесь тем, что треугольник, образованный средними линиями треугольника ABC, подобен ABC, причем точка пересечения медиан является центром подобия.

99. Докажите, что центром искомой окружности является середина отрезка, соединяющего центр описанной окружности и ортоцентр, а радиус равен половине радиуса описанной окружности.

100. Воспользуйтесь тем, что угол между хордой окружности и касательной в одном из концов хорды равен половине дуги, отсекаемой хордой.

101. Докажите, что отрезки A_3A и A_3A_6 равны, параллельны и направлены в одну сторону.

102. Четыре шага, если M лежит на одной из средних линий треугольника; семь шагов — во всех остальных случаях.

103. Искомый треугольник образуется в пересечении прямых, проведенных через вершины треугольника ABC и делящих противоположные стороны в отношении 1:2; площадь его равна $^1/_7$ площади треугольника ABC.

104. Докажите, что $\angle QOC = \angle POC$ (O — центр данной окружности).

105. Докажите, что каждая из диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон четырехугольника $ABCD$ со вписанной в него окружностью, делит диагональ AC в одном и том же отношении.

106. а) Рассмотрите треугольник, для которого стороны данного треугольника являются средними линиями.

б) Найдите равнобедренный треугольник, удовлетворяющий условиям задачи.

107. $d^2 = R^2 - 2Rr$ или $\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}$.

108. $\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}$. При доказательстве воспользуйтесь результатами задач 86 и 105.

109. Докажите, что перпендикуляры, восставленные к сторонам шестиугольника в их серединах, пересекаются все в одной точке.

110. Пусть $ABCDEF$ есть рассматриваемый шестиугольник. Воспользуйтесь соотношениями $S_{\triangle DOB} = S_{\triangle DOE} = S_{\triangle AOB}$ и аналогичными им (O — центр описанного круга).

111. Докажите, что медиана одного треугольника и медиана второго треугольника обе делятся в точке пересечения в отношении 2:1.

112. а) Приложите к исходной трапеции равную ей трапецию.

б) Проведите из точки P прямую $PP_1 \| A_1A_2$ (P_1 — точка стороны A_nA_1), затем прямую $PP_2 \| A_2A_3$ (P_2 — точка стороны A_1A_2) и т. д.; докажите, что многоугольник $P_1P_2 \ldots P_n$ — искомый.

113. Докажите предварительно, что если две окружности C' и C'' с центрами O' и O'' пересекаются в точках A и O и через точку A проведена секущая, пересекающая окружности в точках B' и B'', то $\angle B'OB'' = \angle O'OO''$.

114. Воспользуйтесь следующим предложением: если через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые, параллельные сторонам, то площади образовавшихся параллелограммов, прилегающих к вершинам B и D, будут равны, а также предложением, обратным этому.

115. Пусть M_1 и M_2 — середины диагоналей четырехугольника $ABCD$, O — центр вписанной в него окружности. Воспользуйтесь тем, что

$$S_{M_1AB} + S_{M_1CD} = S_{M_2AB} + S_{M_2CD} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

116. Постройте на каждом круге, как на экваторе, сферу.

117. Проведите через вершину B прямую BP такую, что

$$\angle ABP = \angle DBC.$$

118. Воспользуйтесь теоремой Птолемея (задача 117).

119. См. указание к предыдущей задаче.

120. См. указание к предыдущей задаче.

121. Воспользуйтесь предложением задачи 120.

122. Воспользуйтесь теоремой Птолемея (задача 117).

123. а) Если окружность S_0, описанная около треугольника ABC, и окружность S касаются, то точка касания будет их центром подобия; далее, воспользуйтесь теоремой Птолемея.

б) Воспользуйтесь теоремой Птолемея.

124. а) Пусть X, Y, Z — основания перпендикуляров, опущенных из точки P описанной окружности на стороны треугольника ABC. Докажите, что $\angle ZXB = \angle CXY$.

б) Воспользуйтесь результатом задачи а).

125. а) Рассмотрите точку пересечения двух из четырех центральных окружностей и докажите, что каждая из двух других центральных окружностей проходит через эту точку.

б) Докажите, что каждые четыре из пяти центральных точек являются вершинами четырехугольника, вокруг которого можно описать окружность.

в) Воспользуйтесь методом математической индукции; случаи четного и нечетного n рассмотрите отдельно. Предварительно докажите, что если четыре окружности пересекаются в одной точке, то четыре окружности, каждая из которых проходит через вторые точки пересечения трех из этих окружностей, тоже пересекаются в одной точке.

126. Воспользуйтесь тем, что прямая задачи 124 а) делит пополам отрезок прямой между соответствующей точкой описанной окружности и ортоцентром треугольника.

127. Докажите сначала теорему для того случая, когда треугольники лежат в разных плоскостях.

128. Воспользуйтесь теоремой Дезарга (см. предыдущую задачу).

129. Пусть G, H и K — рассматриваемые точки пересечения противоположных сторон AB и DE, соответственно BC и EF, CD и FA шестиугольника. Опишите окружности вокруг треугольников BDG, BFH, FDK; докажите, что эти окружности пересекаются в одной точке, лежащей на одной прямой с точками K, G, H.

130. Докажите, что прямые, проведенные из произвольной точки диагонали AD параллельно прямым, соединяющим точки соприкосновения с описанной окружностью соответственно сторон AB и DE,

AF и CD, отсекают на сторонах AB и AF равные отрезки, считая от точки соприкосновения этих сторон с окружностью.

131. Спроектируйте вершины треугольника параллельно секущей на произвольную прямую.

132. Для того чтобы убедиться, что три точки лежат на одной прямой, достаточно найти какой-либо треугольник, на сторонах которого лежат эти точки, и затем проверить, что имеет место соотношение теоремы Менелая.

133. Проведите через две вершины треугольника прямые, параллельные секущей, проходящей через третью вершину.

134. е) Рассматриваемые прямые совпадают с прямыми задачи г).

135. а) Решается аналогично задаче 131.

б) Воспользуйтесь тем, что площадь треугольника равна, с одной стороны, полупроизведению основания на высоту, а с другой стороны,— половине произведения сторон на синус угла между ними.

136. Воспользуйтесь теоремой Чевы (задача 133).

137. См. указание к предыдущей задаче.

138. Воспользуйтесь теоремами Менелая и Чевы (задачи 131 и 133).

139. См. указание к предыдущей задаче.

140. Докажите прежде всего требуемую теорему для такого расположения треугольников, когда точка A' совпадает с C, а C' расположена на прямой AB.

141. Докажите прежде всего теорему для такого расположения треугольников, когда все вершины треугольника $A'B'C'$ лежат на соответствующих сторонах треугольника ABC (или на их продолжениях); воспользуйтесь теоремой Чевы (задача 133).

142. Сравните площади треугольников, отсекаемых от угла двумя прямыми, проходящими через A, первая из которых делится в точке A пополам, а вторая нет.

143. а) Рассмотрите отдельно случаи, когда точка пересечения прямых MN и p лежит внутри отрезка MN, в конце этого отрезка, вне этого отрезка и когда прямые MN и p параллельны.

б) Рассмотрите отдельно все возможные случаи взаимного положения отрезка MN и окружности S.

144. а) Рассмотрите отдельно случаи, когда точки A и B лежат по разные стороны l и по одну сторону l.

б) Рассмотрите отдельно случаи, когда точка A лежит внутри тупого угла, образованного прямыми l_1 и l_2, лежит внутри острого угла, образованного этими прямыми, и случаи, когда $l_1 \parallel l_2$ или $l_1 \perp l_2$.

в) Рассмотрите отдельно случаи, когда все три прямые параллельны, когда две прямые параллельны, а третья их пересекает;

когда все прямые пересекаются в одной точке; когда прямые l_1, l_2 и l_3 образуют в пересечении тупоугольный или прямоугольный треугольник; когда прямые l_1, l_2 и l_3 образуют в пересечении остроугольный треугольник. В последнем случае вершинами искомого треугольника являются основания высот остроугольного треугольника со сторонами l_1, l_2 и l_3.

145. Искомая точка — та, из которой стороны треугольника видны под равными углами в 120° (если такая точка лежит внутри треугольника).

146. Точка пересечения медиан. Для доказательства найдите соотношение, связывающее сумму квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до трех вершин треугольника с квадратом расстояния от этой точки до точки пересечения медиан треугольника.

147. Точка, расстояния от которой до сторон треугольника пропорциональны этим сторонам.

148. Сравните выражения $\frac{AM}{a}+\frac{BM}{b}$ и $\frac{AX}{a}+\frac{BX}{b}$, где точка M удовлетворяет условиям задачи, X — какая-то другая точка прямой PQ.

149. Преобразуйте подобно четырехугольник с коэффициентом подобия $k=\frac{c}{a}$ и приложите полученный четырехугольник к исходному равными сторонами; определите, в каком случае полученная в результате фигура будет иметь наибольшую возможную площадь.

150. Пусть ABF есть треугольник, углы A и B равны двум соседним углам рассматриваемого четырехугольника. Задача сводится к тому, чтобы пересечь этот треугольник секущей CD, имеющей данное направление так, чтобы у получившегося четырехугольника $ABCD$ отношение площади к квадрату периметра было возможно бóльшим.